

Spektrale metodes en gebiedontbinding

EA Nel, N Hale

Departement Toegepaste Wiskunde, Stellenbosch Universiteit, Suid-Afrika
Korresponderende outeur: Emma Nel E-pos: 21865663@sun.ac.za

Spectral methods and domain decomposition: This research investigated techniques for solving second-order elliptic ordinary and partial differential equations with variable coefficients on one- and two-dimensional domains. Spectral collocation methods were combined with domain decomposition strategies, specifically the hierarchical Poincaré-Steklov (HPS) method, and the efficiency thereof was demonstrated on some simple examples.

Gewone en parsieë differensiaalvergelings (GDV en PDV) is alomteenwoordig in die wetenskappe en ingenieurswese. Toepassings daarvan ontstaan in 'n wye verskeidenheid studieveld, soos termodinamika, elektrostatika, vloeistofdinamika, algemene relativiteit en kwantumeganika. Hierdie vergelykings het tipies nie geslote-vorm oplossings nie en vereis dus numeriese metodes, soos eindige-verskil-, eindige-element- of spektrale metodes, om dit op te los. Terwyl eindige-verskil-metodes en eindige-element-metodes op lokale benaderings gebaseer is, is spektrale metodes op globale benaderings gebaseer en gevolglik lei dit dikwels tot meer akkurate oplossings. Hierdie navorsing fokus op die gebruik van spektrale kollokasie-metodes saam met gebiedontbindingstrategieë om tweede-orde elliptiese GDVs en PDVs met veranderlike koëffisiënte op een- en twee-dimensionele gebiede op te los.

Om spektrale kollokasie toe te pas moet 'n gegewe probleem gediskretiseer word deur die funksies in die differensiaalvergeliking by die kollokasiepunte te evalueer en differensiasie matrikse te gebruik om die afgeleides te benader. In een dimensie word die Chebyshev-punte as kollokasiepunte gebruik, terwyl in twee dimensies 'n tensorproduk-rooster van Chebyshev-punte gebruik word. 'n Diskrete weergawe van die probleem kan dan in die vorm van 'n lineêre stelsel geskryf word. Dit is egter welbekend dat die matrikse wat deur spektrale kollokasie geskep word, dig gepak is en dat spektrale metodes beperk is in die tipe gebiede waarop hulle toegepas kan word.

Onlangse ontwikkelinge in gebiedontbindingsbenaderings bied wel hoop om van hierdie beperkinge te oorkom. Gebiedontbinding is die proses om 'n gegewe gebied in 'n stel kleiner subgebiede te verdeel. Dit stel mens nie net in staat om spektrale metodes toe te pas op meer interessante en alledaagse geometrieë nie, maar maak lokale verfyning van gebiede ook moontlik. Die krag agter gebiedontbinding lê in die oorsakeling van 'n groot probleem (wat buitensporig duur is om op te los) na 'n hoeveelheid kleiner probleme wat elkeen effektief opgelos kan word, selfs in parallel. Die oplossings van die subprobleme word dan strategies saamgesmelt om die oplossing vir die oorspronklike probleem te produseer. Sodoende word 'n spesifieke gebiedontbindingstrategie, genaamd die hiërargiese Poincaré-Steklov-metode (HPS), gebruik.

Die HPS-metode is 'n doeltreffende algoritme wat gebruik kan word om die groot lineêre sisteme wat deur spektrale metodes geproduseer word effektief op te los. Dit verbind oplossings by die grense tussen verskillende subgebiede deur die gebruik van twee tipes operatore. Hierdie operatore verseker dat die oplossings, en hulle afgeleides, oor die gebiedgrense ooreenstem en dat die lokale oplossings saamgeweef kan word vir 'n oplossing op die globale gebied.

Die implementasie van die metode in hierdie navorsing hanteer tans enige gebied wat in reghoekige subgebiede verdeel kan word. Om die implementasie te evalueer word van 'n toetsprobleem gebruik gemaak, naamlik Poisson se vergelyking op 'n eenheidsvierkant. Daar is gevind dat die metode 'n goeie tiensyfer-akkuraatheid gee by alle interne punte op die vierkant en 'n swakker vyfsyfer-akkuraatheid by die hoekpunte. Hierdie swak akkuraatheid is teoreties verduidelikbaar deur singulariteite by die hoeke van die vierkant en twee moontlike strategieë word voorgestel om daarop te verbeter – een opsie is lokale verfyning by die hoekpunte.

Tans word uitbreidings van die metode in 'n verskeidenheid rigtings ondersoek. Byvoorbeeld, die metode is huidig slegs van toepassing op PDVs van een veranderlike, maar baie PDVs van belang, soos die Navier-Stokes-vergelyking, wat gebruik word vir vloeistofmodellering, vereis die gelyktydige oplossing van verskeie veranderlikes. In toekomstige werk kan die metode ook verder ontwikkel word om meer komplekse oppervlaktes te hanteer, soos gebiede met gekromde grense.

Nota: 'n Seleksie van referaatopsommings: Studentesimposium in die Natuurwetenskappe, 3-4 November 2022, Akademia. Reëlingskomitee: Prof Rudi Pretorius (Departement Geografie, Universiteit van Suid-Afrika); Dr Hertzog Bisset (Suid-Afrikaanse Kernenergie-korporasie); Prof Hannes Rautenbach (Kantoor van die Besturende Direkteur, Akademia).