

# Die effek van veelvuldige lynverwydering op die onafhanklikheidsgetal van 'n asikliese grafiek

**Author:**

Jan H van Vuuren

**Affiliations:**

Departement Bedryfsingenieurswese, Universiteit Stellenbosch

**Corresponding author:**Jan H van Vuuren  
Privaatsak X1, Matieland  
7602, Suid-Afrika  
E-pos: vuuren@sun.ac.za**Dates:**Received: 21/06/2017  
Accepted: 12/11/2018  
Published:**How to cite this article:**Jan H van Vuuren,  
Die effek van veelvuldige  
lynverwydering op die  
onafhanklikheidsgetal  
van 'n asikliese grafiek,  
*Suid-Afrikaanse Tydskrif  
vir Natuurwetenskap en  
Tegnologie* 38(1) (2019)**Copyright:**© 2019. Authors.  
Licensee: *Die Suid-  
Afrikaanse Akademie vir  
Wetenskap en Kuns*. This  
work is licensed under  
the Creative Commons  
Attribution License.

'n Deelversameling  $X \subseteq V$  van die puntversameling  $V$  van 'n grafiek  $G = (V, E)$  is 'n *onafhanklike versameling* in  $G$  indien geen twee punte van  $X$  naasliggend is in  $G$  nie. Die kardinaalgetal van 'n grootste onafhanklike versameling in  $G$  word die *onafhanklikheidsgetal* van  $G$  genoem en deur  $\alpha(G)$  aangedui. 'n Nie-leë grafiek  $G$  is *p-stabiel* as  $p$  die grootste getal *arbitrêre* lyne is wat uit  $G$  verwyder kan word sonder dat die onafhanklikheidsgetal van die gevolglike grafiek verander, en *q-krities* as  $q$  die kleinste getal *arbitrêre* lyne is wat uit  $G$  verwyder kan word om die onafhanklikheidsgetal van die gevolglike grafiek *noodwendig* te verander. Die klasse van *p-stabiele* en *q-kritiese* woude (asikliese grafieke) met  $n$  punte word in hierdie artikel vir alle toelaatbare waardes van  $p$ ,  $q$  en  $n$  volledig gekarakteriseer.

**Sleutelwoorde:** Onafhanklike puntversamelings in grafieke; bome; woude; kritiekheid en stabiliteit met betrekking tot lynverwydering.

## The effect of multiple edge removals on the independence number of an acyclic graph:

A subset  $X \subseteq V$  of the vertex set  $V$  of a graph  $G = (V, E)$  is an *independent set* in  $G$  if no two vertices of  $V$  are adjacent in  $G$ . The cardinality of a largest independent set in  $G$  is called the *independence number* of  $G$  and is denoted by  $\alpha(G)$ . A non-empty graph  $G$  is *p-stable* if  $p$  is the largest number of *arbitrary* edges that can be removed from  $G$  without changing the independence number of the resulting graph, and *q-critical* if  $q$  is the smallest number of *arbitrary* edges that have to be removed from  $G$  in order *necessarily* to change the independence number of the resulting graph. The classes of *p-stable* and *q-critical* forests (acyclic graphs) of order  $n$  are characterised in this paper for all permissible values of  $p$ ,  $q$  and  $n$ .

**Key words:** Independent sets in graphs; trees; forests; criticality and stability with respect to edge removal

## Inleiding

Grafieke word dikwels gebruik om struktuur tussen versamelings entiteite wiskundig te modelleer en het vele praktiese toepassings. Die punte van 'n grafiek mag byvoorbeeld potensiele liggings vir die berging van 'n gevaarlike produk voorstel (soos vlambare materiaal of radio-aktiewe afval), terwyl 'n lyn tussen twee sulke punte van die grafiek mag aandui dat die ooreenstemmende twee liggings te naby aan mekaar is om eenhede van die gevaarlike produk in beide liggings te berg (in die sin dat 'n verlies aan bergingsintegriteit by een ligging die bergingsintegriteit van die ander ligging in gevaar mag stel).

In so 'n toepassing stem 'n onderling veilige versameling bergingsliggings ooreen met 'n sogenaamde *onafhanklike versamelings* punte in die grafiek ('n versameling punte waarvan geen twee naasliggend is in die grafiek nie), terwyl die grootte van 'n grootste versameling onderling veilige bergingsliggings deur die *onafhanklikheidsgetal* van die grafiek voorgestel word. Wanneer twee voorheen onderling onveilige bergingsliggings dan teenoor mekaar verskans word, sodat hulle daarná as onderling veilig beskou mag word, word die beveiligingsaksie deur 'n lynverwydering uit die onderliggende grafiek gemodelleer. In so 'n geval is die vraag dan of die beveiligingsaksie (moontlik teen hoë koste) die moeite werd is in die sin dat dit die onafhanklikheidsgetal van die gevaardgaande grafiekmodel vergroot.

'n Meer algemene vraag is die volgende: Wat is die kleinste getal *arbitrêre* lynverwyderings uit 'n gegewe grafiek wat sal verseker dat die onafhanklikheidsgetal van die grafiek *noodwendig* verhoog? Hoewel dit natuurlik voordelig sou wees om hierdie vraag vir 'n algemene grafiek te beantwoord, bemoelilik die teenwoordigheid van siklusse in grafieke die oplossing van hierdie vraagstuk noemenswaardig. 'n Eerste stap in hierdie rigting word egter in hierdie

artikel geneem deur die bogenoemde vraag vir die klas van woude (asikliese grafieke) te beantwoord, wat die populêre klas van bome insluit.

### Wiskundige agtergrond

'n Deelversameling  $X \subseteq V$  van die puntversameling  $V$  van 'n eenvoudige grafiek  $G = (V, E)$  is 'n *onafhanklike (punt)-versameling* in  $G$  indien geen twee punte van  $X$  naasliggend is in  $G$  nie. Die kardinaalgetal van 'n grootste onafhanklike versameling in  $G$  word die (punt)-*onafhanklikheidsgetal* van  $G$  genoem en deur  $\alpha(G)$  aangedui. 'n Onafhanklike versameling in  $G$  met kardinaalgetal  $\alpha(G)$  word 'n  $\alpha(G)$ -*versameling* van  $G$  genoem. Die begrip van punt-onafhanklikheid in grafieke is deur Berge (1962) en Ore (1962) geformaliseer en is sedertdien wyd bestudeer.

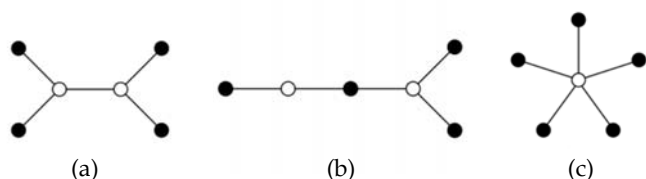
Die deelgrafiek wat verkry word deur 'n lyn  $e$  uit 'n grafiek  $G$  te verwyder, word aangedui deur  $G - e$ . Dit is maklik om te bewys dat

$$\alpha(G) \leq \alpha(G - e) \quad \text{en} \quad \alpha(G - e) \leq \alpha(G) + 1 \quad (1)$$

vir enige grafiek  $G$  en enige lyn  $e$  in  $G$  (Grobler en Mynhardt, 2001). Die volgende vrae ontstaan natuurlik:

- I. Vir watter grafieke  $G$  geld dit dat die verwydering van enige lyn uit  $G$  'n grafiek oplewer waarvoor die onafhanklikheidsgetal gelyk is aan dié van  $G$ ?
- II. Vir watter grafieke  $G$  geld dit dat die verwydering van enige lyn uit  $G$  'n grafiek oplewer waarvoor die onafhanklikheidsgetal (een) groter is as dié van  $G$ ?

Gunther et al. (1993) het Vraag I vir bome (samehangende, asikliese grafieke) beantwoord deur dáárdie bome te karakteriseer waarvoor die onafhanklikheidsgetal nie deur lynverwydering geraak word nie. Terwyl die bome wat só gekarakteriseer is die gemeenskaplike eienskap besit dat geen enkele lynverwydering die onafhanklikheidsgetalle van die gevolglike grafieke laat toeneem nie, is die robuustheidsvlakke van hierdie bome ten opsigte van *veelvuldige* lynverwyderings nie almal dieselfde nie. Die onafhanklikheidsgetalle van al drie bome in Figuur 1 word byvoorbeeld nie deur enige enkele lynverwydering beïnvloed nie. Die boom in Figuur 1(c) is egter fundamenteel meer robuust teen veelvuldige lynverwyderings as die bome in Figure 1(a)–(b). Meer spesifiek, die grootste getal arbitrêre lynverwyderings uit die bome in Figure 1(a), 1(b) en 1(c) sonder 'n toename in die onafhanklikheidsgetalle van die gevolglike grafieke is onderskeidelik een, een en vier.



**FIGUUR 1:** Drie bome van orde 6 waarvan die onafhanklikheidsgetalle nie deur enkele lynverwyderings beïnvloed word nie. Maksimale onafhanklike versamelings word deur soliede punte aangedui.

Challali en Rad (2012) het ook Vraag II vir bome beantwoord deur dáárdie bome te karakteriseer waarvoor die onafhanklikheidsgetal noodwendig deur lynverwydering (met een) vermeerder. Terwyl die bome wat só gekarakteriseer is die gemeenskaplike eienskap besit dat enige enkele lynverwydering die onafhanklikheidsgetalle van die gevolglike grafieke laat toeneem, is die robuustheidsvlakke van hierdie bome ten opsigte van *veelvuldige* lynverwyderings weereens nie almal dieselfde nie. Die kleinste getal (arbitrêre) lyne wat byvoorbeeld uit die bome in Figure 1(a)–(b) verwyder kan word om woude te lewer waarvan die onafhanklikheidsgetalle noodwendig groter is as dié van die oorspronklike bome, is vier, terwyl die ooreenstemmende getal lyne in die geval van die boom in Figuur 1(c) vyf is.

### Navorsingsvrae

Die volgende vrae bly dus onbeantwoord:

- III. Hoeveel (arbitrêre) lyne kan uit die bome wat deur Gunther et al. (1993) gekarakteriseer is, verwyder word voordat die onafhanklikheidsgetal van die gevolglike woude toeneem?
- IV. Wat is die kleinste getal (arbitrêre) lyne wat uit die bome wat deur Challali en Rad (2012) gekarakteriseer is, verwyder kan word sodat die onafhanklikheidsgetal van die gevolglike bome (noodwendig) toeneem?

Die doel van hierdie artikel is om die bogenoemde twee vrae te beantwoord. Die volgende definisies word vir hierdie doel ingevoer. 'n Nie-leë grafiek  $G$  is *p-stabiel* as  $p$  die grootste getal *arbitrêre* lyne is wat uit  $G$  verwyder kan word sonder dat die onafhanklikheidsgetal van die gevolglike grafiek verander, en *q-krities* as  $q$  die kleinste getal *arbitrêre* lyne is wat uit  $G$  verwyder kan word om die onafhanklikheidsgetal van die gevolglike grafiek *noodwendig* te vergroot. Die bome in Figure 1(a)–(b) is byvoorbeeld 1-stabiel en 4-krities, terwyl die boom in Figuur 1(c) 4-stabiel en 5-krities is.

### Uitleg van die artikel

Die artikel is soos volg gestruktureer. Nadat 'n bondige oorsig oor die relevante literatuur en enkele voorlopige resultate in §2 gegee is, word die stabiliteits- en kritiese waardes van 'n aantal oneindige klasse bome in §3 daargestel. Induktiewe karakteriserings van *p*-stabiele en *q*-kritiese woude van enige vaste orde volg daarna in onderskeidelik §4 en §5. Die artikel word laastens in §6 saamgevat en in §7 afgesluit met twee voorstelle vir opvolgnavorsing. Alle grafiekteoretiese notasies in hierdie artikel volg die konvensies in Chartrand en Oellermann (1993).

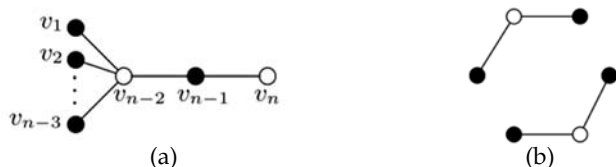
### Voorlopige resultate

Die volgende basiese waarnemings volg uit die definisies van *p*-stabiliteit en *q*-kritiekheid.

### Waarneming 1

- (a) Vir elke  $p$ -stabiele en  $q$ -kritiese grafiek geld dit dat  $p < q$ .  
 (b) Elke 1-kritiese grafiek is 0-stabiel.

Let op dat die omgekeerde van Waarneming 1(b) nie noodwendig waar is nie; die boom in Figuur 2(a) is 'n teenvoorbeeld.



**FIGUUR 2:** Twee teenvoorbeelde. (a) 'n Boom van orde  $n$  en maksimum graad  $n-2$  wat 0-stabiel is.  
 (b) 'n Woud van orde 6 wat 3-krities is, maar geen komponent bevat wat self 3-krities is nie.

### Proposisie 1

Gestel  $G$  is 'n grafiek met nie-leë komponente  $G_1, \dots, G_k$ . As  $G_i$   $p_i$ -stabiel en  $q_i$ -krities is vir elke heelgetal  $i \in \{1, \dots, k\}$ , dan is  $G$   $p$ -stabiel en  $q$ -krities vir  $p = \min \{p_1, \dots, p_k\}$  en een of ander heelgetal  $q \geq \max \{q_1, \dots, q_k\}$ .

**Bewys:** Gestel  $G$  is  $p$ -stabiel en laat  $r = \min \{p_1, \dots, p_k\}$ . Dan is daar geen deelversameling van  $r < p_i$  lyne van  $G_i$  wat uit  $G$  verwyder kan word sodat die onafhanklikheidsgetal van die gevolglike grafiek groter is as dié van  $G$  nie. Daarom is  $p \geq r$ . Maar aangesien daar 'n versameling van  $p_i+1$  lyne van  $G_i$  is wat uit  $G$  verwyder kan word sodat die onafhanklikheidsgetal van die gevolglike grafiek streng groter is as dié van  $G$ , volg dit dat  $p \leq p_i$  vir elke heelgetal  $i \in \{1, \dots, k\}$ , en daarom is  $p \leq r$ . Gevolglik is  $p = r$ .

Gestel vervolgens  $G$  is  $q$ -krities en laat  $s = \max \{q_1, \dots, q_k\}$ . Aangesien daar 'n versameling van  $q_i-1$  lyne van  $G_i$  is wat uit  $G$  verwyder kan word wat die onafhanklikheidsgetal van die gevolglike grafiek onveranderd laat, volg dit dat  $q \geq q_i$  vir elke heelgetal  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Daarom is  $q \geq s$ .  $\square$

Proposisie 1 impliseer dat 'n grafiek  $p$ -stabiel is as en slegs as dit 'n komponent bevat wat self  $p$ -stabiel is, terwyl elke ander komponent  $r$ -stabiel is vir een of ander heelgetal  $r \geq p$ . Daar is egter geen soortgelyke resultaat vir kritiekheid van grafieke nie. Die teenvoorbeeld in Figuur 2(b) toon dat 'n grafiek  $q$ -krities kan wees sonder dat dit noodwendig 'n komponent hoef te bevat wat self ook  $q$ -krities is.

Chellali en Rad (2012) het 1-kritiese bome soos volg gekarakteriseer.

### Proposisie 2

'n Boom is 1-krities as en slegs as dit 'n volledige grafiek van orde 2 is.

Die volgende karakterisering van 1-kritiese woude volg onmiddellik uit die bogenoemde resultaat.

### Gevolgtrekking 1

'n Woud is 1-krities as en slegs as dit maksimum graad 1 het.

**Bewys:** Laat  $F$  'n woud met maksimum graad 1 wees. Dan bevat  $F$   $k_1 \geq 0$  geïsoleerde punte en  $k_2 \geq 1$  komponente wat elk isomorf is aan die volledige grafiek van orde 2. Daarom is  $\alpha(F-e) = k_1 + k_2 + 1 > k_1 + k_2 = \alpha(F)$  vir enige lyn  $e$  van  $F$ , met die gevolg dat  $F$  1-krities is. Omgekeerd, gestel  $F$  is 'n 1-kritiese woud. Dan volg dit uit Proposisie 1 dat elke nie-leë komponent van  $F$  1-krities is en daarom isomorf is aan die volledige grafiek van orde 2 volgens Proposisie 2. Gevolglik het  $F$  maksimum graad 1.  $\square$

Die volgende resultaat volg verder uit Waarneming 1(b) in die lig van die bogenoemde resultaat.

### Gevolgtrekking 2

Elke woud met maksimum graad 1 is 0-stabiel.

Daar is egter baie woude met maksimum graad groter as 1 wat ook 0-stabiel is. Hierdie bewering word bevestig deur die volgende karakterisering van 0-stabiele bome deur Gunther et al. (1993).

### Proposisie 3

'n Boom is  $p$ -stabiel vir een of ander  $p > 0$  as en slegs as dit 'n unieke  $\alpha$ -versameling bevat.

Laat  $T$  'n  $p$ -stabiele boom met 'n unieke  $\alpha$ -versameling  $X \subseteq V(T)$  wees, waar  $p > 0$ , en beskou die volgende uitbreidingsoperasies op  $T$ :

- $O_1$  Verbind 'n (nuwe) punt aan enige punt in  $V(T) \setminus X$ .
- $O_2$  Verbind 'n (nuwe) pad van orde 2 aan enige punt in  $X$ .
- $O_3$  Verbind die middelpunt van 'n (nuwe) pad van orde 3 aan enige punt in  $V(T)$ .

Deur op te let dat enige van die bogenoemde operasies  $O_1-O_3$  'n nuwe  $p$ -stabiele boom voortbring, het Gunther et al. (1993) Proposisie 3 gebruik om die volgende resultaat daar te stel.

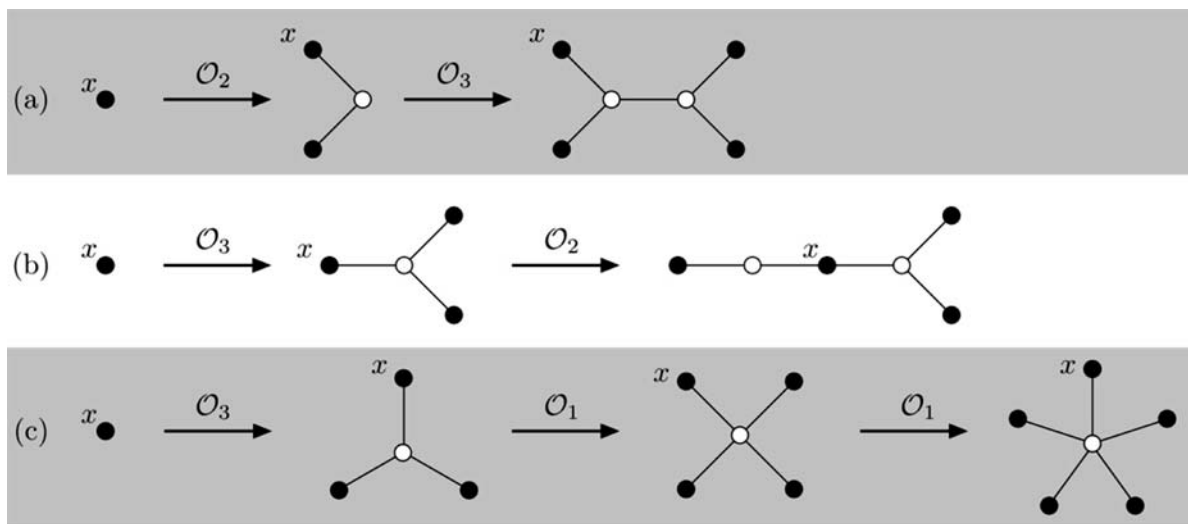
### Proposisie 4 (Gunther et al., 1993)

'n Boom is nie-nul-stabiel as en slegs as dit uit 'n geïsoleerde punt deur middel van enige ry operasies van die tipes  $O_1-O_3$  iteratief gekonstrueer kan word.

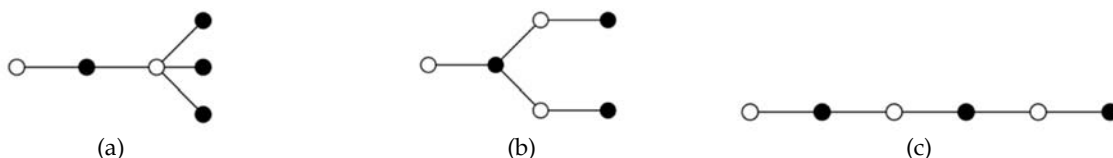
Figuur 3 bevat voorbeelde van konstruksies (uit 'n geïsoleerde punt  $x$ ) van die drie bome van orde 6 in Figuur 1 deur operasies van die tipes  $O_1-O_3$  iteratief toe te pas. Die karakterisering in Proposisie 4 kan in die lig van Proposisie 1 soos volg na woude veralgemeen word:

### Waarneming 2

- (a) 'n Nie-leë woud is nie-nul-stabiel as en slegs as elk van die komponente daarvan iteratief konstrueerbaar is uit 'n geïsoleerde punt deur 'n ry operasies van die tipes  $O_1-O_3$ .  
 (b) 'n Nie-leë woud is 0-stabiel as en slegs as dit 'n boom bevat wat nie iteratief konstrueerbaar is uit 'n geïsoleerde punt deur 'n ry operasies van die tipes  $O_1-O_3$  nie.



Figuur 3: Iteratiewe konstruksies van die drie nie-nul-stabiele bome van orde 6 in Figuur 1 deur operasies van die tipes  $O_1$ – $O_3$  toe te pas.



FIGUUR 4: Die drie 0-stabiele bome van orde 6.

Daar is byvoorbeeld presies drie bome van orde 6 wat nie iteratief konstrueerbaar is deur rye operasies van die tipes  $O_1$ – $O_3$  nie; hierdie drie bome word in Figuur 4 getoon. Elkeen van hierdie bome het maksimum graad groter as 1, maar is tog 0-stabiel in die lig van Waarneming 2(b).

### Stabiliteits- en kritiese waardes van bome met spesiale struktuur

Die stabiliteits- en kritiese waardes van drie oneindige klasse bome word in hierdie afdeling daargestel. Daar is, tot op isomorfisme na, slegs een boom van orde  $n$  met maksimum graad  $n - 1$ , naamlik die ster-grafiek  $K_{1,n-1}$ . Daar is soortgelyk ook net een boom van orde  $n$  met maksimum graad  $n - 2$  tot op isomorfisme na, soos in Figuur 2(a) getoon.

**Proposisie 5**

- (a) Die ster-grafiek  $K_{1,n-1}$  is  $(n - 2)$ -stabiel en  $(n - 1)$ -krities vir enige heelgetal  $n \geq 2$ .
- (b) Die boom van orde  $n$  met maksimum graad  $n - 2$  is 0-stabiel en  $(n - 2)$ -krities vir enige heelgetal  $n > 4$ .

**Bewys:** (a) Dit kan maklik nagegaan word dat  $\alpha(K_{1,n-1}) = n - 1$  vir enige heelgetal  $n \geq 2$ . Die verwydering van enige  $i \in \{1, \dots, n - 2\}$  lyne uit die ster-grafiek  $K_{1,n-1}$  lewer die verkleinde ster-grafiek  $K_{1,n-i-1}$  tesame met  $i$  geïsoleerde punte, waarvan die onafhanklikheidsgetal  $(n - i - 1) + i = n - 1$  is. Daarom is  $K_{1,n-1}$   $p$ -stabiel en  $q$ -krities vir een of ander paar heelgetalle  $p \geq n - 2$  en  $q > n - 2$ . Die verwydering van al  $n - 1$  lyne uit die ster-grafiek  $K_{1,n-1}$  lewer egter 'n grafiek bestaande uit  $n$  geïsoleerde punte, waarvan die onafhanklikheidsgetal  $n$  is.

Gevolgtrekking 3 is  $K_{1,n-1}$   $p$ -stabiel en  $q$ -krities vir een of ander paar heelgetalle  $p < n - 1$  en  $q \leq n - 1$ .

(b) Laat  $T$  'n boom van orde  $n$  met maksimum graad  $n - 2$  wees. Dan is  $T$  isomorf aan die boom in Figuur 2(a) en dus is  $\alpha(T) = n - 2$ . Verwydering van die lyn  $v_{n-1} v_n$  uit  $T$  lei na 'n woud bestaande uit die ster-grafiek  $K_{1,n-2}$  tesame met 'n geïsoleerde punt, waarvan die onafhanklikheidsgetal  $n - 1$  is. Daarom is  $T$  0-stabiel.

Verder lewer die verwydering uit  $T$  van die lyn  $v_{n-1} v_{n-2}$  tesame met die  $n - 4$  lyne  $v_i v_{n-2}$  vir  $i \in \{1, \dots, n - 4\}$  'n woud wat twee disjunkte kopieë van die volledige grafiek tesame met  $n - 4$  geïsoleerde punte bevat, waarvan die onafhanklikheidsgetal  $n - 2$  is. Daarom is  $T$   $q$ -krities vir een of ander heelgetal  $q > n - 3$ . Die verwydering van enige  $n - 2$  lyne uit  $T$  lewer egter 'n woud wat 'n enkele kopie van die volledige grafiek van orde 2 tesame met  $n - 2$  geïsoleerde punte bevat, waarvan die onafhanklikheidsgetal  $n - 1$  is. Daarom is  $T$   $q$ -krities vir een of ander heelgetal  $q \leq n - 2$ . □

Proposisie 5(b) het die volgende interessante resultaat in die lig van Waarneming 1(a) tot gevolg:

**Gevolgtrekking 3**

Die (positiewe) verskil  $q - p$  tussen die waardes waarvoor 'n nie-leë grafiek  $q$ -krities en  $p$ -stabiel is, kan arbitrêr groot wees.

Hierdie afdeling word afgesluit deur die stabiliteits- en kritiese waardes van die klas van paaie daar te stel. Die

volgende resultaat berus op die bekende feit dat

$$\alpha(P_n) = \lceil n/2 \rceil \quad (2)$$

vir 'n pad  $P_n$  van orde  $n$ .

### Proposisie 6

- (a) 'n Pad van orde  $n$  is 0-stabiel as  $n \geq 2$  ewe is, of 1-stabiel as  $n \geq 3$  onewe is.  
 (b) 'n Pad van orde  $n$  is  $\lceil n/2 \rceil$ -krities vir alle  $n \geq 2$ .

**Bewys:** (a) Gestel  $n \geq 2$  is ewe en dat  $e$  'n lyn insident aan een van die endpunte van  $P_n$  is. Dan is  $\alpha(P_n - e) = n/2 + 1 > n/2 = \alpha(P_n)$ , waaruit volg dat  $P_n$   $p$ -stabiel is vir een of ander heelgetal  $p < 1$ . Gestel vervolgens  $n$  is onewe. Dan lewer die verwydering van enige enkele lyn uit  $P_n$  die woud  $P_i \cup P_{n-i}$  vir een of ander heelgetal  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , en is daar twee gevalle om te oorweeg:

*Geval 1:*  $i$  is onewe. In hierdie geval is  $n-i$  ewe en dus is

$$\alpha(P_i \cup P_{n-i}) = \frac{i+1}{2} + \frac{n-i}{2} = \frac{n+1}{2} = \alpha(P_n).$$

Daarom is  $P_n$   $p$ -stabiel vir een of ander heelgetal  $p \geq 1$  in hierdie geval.

*Geval 2:*  $i$  is ewe. In hierdie geval  $n-i$  is onewe en dus is

$$\alpha(P_i \cup P_{n-i}) = \frac{i}{2} + \frac{n-i+1}{2} = \frac{n+1}{2} = \alpha(P_n).$$

Daarom is  $P_n$  ook in hierdie geval  $p$ -stabiel vir een of ander heelgetal  $p \geq 1$ .

Laat  $e_1$  en  $e_2$  nou die twee lyne insident met die endpunte van  $P_n$  wees. Dan is

$$\alpha(P_n - \{e_1, e_2\}) = \frac{(n-2)+1}{2} + 2 > \frac{n+1}{2} = \alpha(P_n),$$

waaruit volg dat  $P_n$   $p$ -stabiel vir een of ander heelgetal  $p < 2$ .

(b) As  $q \in \{1, \dots, n-1\}$  lyne  $e_1, \dots, e_q$  uit 'n pad van orde  $n$  verwyder word, word 'n woud bestaande uit  $q+1$  disjunkte paaie verkry. 'n Onafhanklike versameling in hierdie woud word gevorm deur een punt in elkeen van hierdie paaie te kies. Daarom is

$$\max_{e_1, \dots, e_q} \alpha(P_n - \{e_1, \dots, e_q\}) \geq q + 1.$$

Dit volg dus uit (2), deur  $q = \lceil n/2 \rceil$  te neem, dat  $P_n$   $r$ -krities is vir een of ander heelgetal  $r \leq \lceil n/2 \rceil$ . Deur egter elke tweede lyn uit  $P_n$  te verwyder, word 'n woud verkry waarvan die onafhanklikheidsgetal gelyk is aan dié van  $P_n$ . Daarom is  $P_n$   $q$ -krities is vir een of ander heelgetal  $q > \lceil n/2 \rceil - 1$ .

## Induktiewe karakterisering van $p$ -stabile woude

Dui die versameling van alle nie-isomorfe grafieke wat verkry word deur presies  $p$  lyne uit 'n gespesifiseerde grafiek  $G$  te verwyder, aan deur  $G - pe$  en let op die subtile notasie-verskil tussen 'n grafiek  $G$  waaruit 'n spesifieke lyn  $e$  verwyder word (aangedui deur  $G - e$ ) en die versameling grafieke wat verkry word deur enige (enkele) lyn uit  $G$

te verwyder (aangedui deur  $G - 1e$ ). Laat  $\alpha(G - pe)$  die versameling waardes van  $\alpha(H)$  aandui wat verkry word deur  $H \in G - pe$  (vir 'n vaste waarde van  $p$ ) te varieer. Dit volg uit herhaaldelike toepassing van (1) dat  $\alpha(G - pe) \in \{\alpha(G), \alpha(G) + 1, \dots, \alpha(G) + p\}$  vir enige grafiek  $G$  met  $m$  lyne en enige  $p \in \{0, \dots, m\}$ .

Dit is moontlik om die versameling van  $p$ -stabile woude van orde  $n$  induktief te karakteriseer in terme van die versamelings van  $r$ -stabile woude van orde  $n$  vir alle  $r < p$ .

### Proposisie 7

'n Woud  $F$  met minstens  $p > 0$  lyne is  $p$ -stabiel as en slegs as

- (a)  $\alpha(G) = \alpha(F)$  vir enige deelwoud  $G \in F - 1e$ ,  
 (b) elke deelwoud  $G \in F - 1e$   $r$ -stabiel is vir een of ander heelgetal  $r \geq p - 1$ , en  
 (c) daar 'n  $(p - 1)$ -stabile deelwoud  $G^* \in F - 1e$  bestaan.

**Bewys:** Laat  $F$  'n  $p$ -stabile woud wees vir een of ander  $p > 0$ . Dan volg die noodsaaklikheid van (a) uit die feit dat  $p \geq 1$ .

Gestel nou daar bestaan 'n  $r$ -stabile deelwoud  $G' \in F - 1e$  vir een of ander heelgetal  $r < p - 1$ . Dan is

$$\begin{aligned} \max \alpha(F - pe) - \alpha(F) &= \max \alpha((F - 1e) - (p - 1)e) - \alpha(F) \\ &\geq \max \alpha(G' - (p - 1)e) - \alpha(G') \\ &> 0, \end{aligned}$$

wat die  $p$ -stabiliteit van  $F$  weerspreek - 'n teenspraak wat die noodsaaklikheid van (b) bevestig.

Gestel vervolgens dat elke element van  $F - 1e$   $r$ -stabiel is vir een of ander heelgetal  $r \geq p$ . Dan bestaan daar 'n element  $G'' \in F - 1e$  sodat

$$\begin{aligned} \max \alpha(F - (p + 1)e) - \alpha(F) &= \max \alpha((F - 1e) - pe) - \alpha(F) \\ &= \max \alpha(G'' - pe) - \alpha(G'') \\ &= 0, \end{aligned}$$

wat weereens die  $p$ -stabiliteit van  $F$  weerspreek en dus die noodsaaklikheid van (c) bevestig.

Gestel, omgekeerd, dat die voorwaardes (a)-(c) geld. Dan volg dit uit (c) dat daar 'n  $(p - 1)$ -stabile element  $G^* \in F - 1e$  bestaan. Verder volg dit uit (a) dat

$$\begin{aligned} \max \alpha(F - (p + 1)e) - \alpha(F) &= \max \alpha((F - 1e) - pe) - \alpha(F) \\ &\geq \max \alpha(G^* - pe) - \alpha(G^*) \\ &> 0, \end{aligned}$$

terwyl dit uit (a) en (b) volg dat daar 'n element  $\hat{G} \in F - 1e$  bestaan waarvoor

$$\begin{aligned} \max \alpha(F - pe) - \alpha(F) &= \max \alpha((F - 1e) - (p - 1)e) - \alpha(F) \\ &= \max \alpha(\hat{G} - pe) - \alpha(\hat{G}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daarom is  $F$   $p$ -stabiel, wat toon dat die voorwaardes (a)-(c) voldoende is vir die  $p$ -stabiliteit van 'n woud.  $\square$

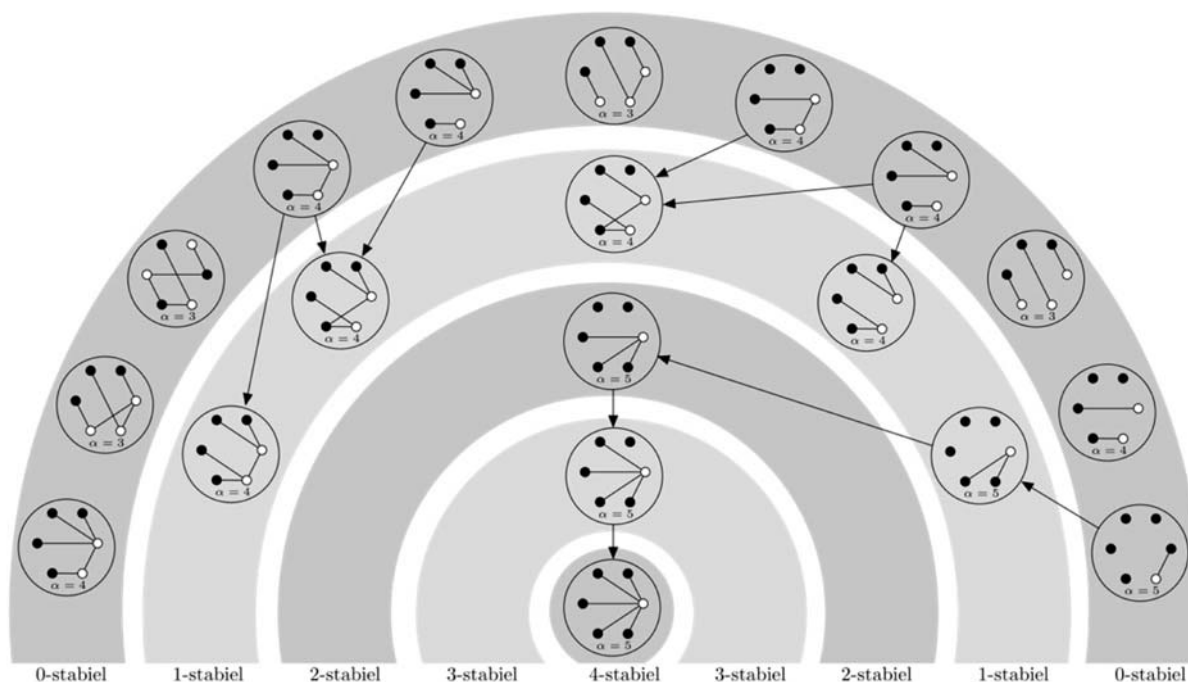
Die deelwoud  $G^* \in F - 1e$  in Proposisie 7(c) word 'n *sertifikaat* met betrekking tot die  $p$ -stabiliteit van  $F$  genoem. Die basisstap vir die (sterk) induktiewe karakteriseringsproses wat in Proposisie 7 gesuggereer word, is die karakterisering van 0-stabile woude in Waarneming 2(b). Die induktiewe proses om die versamelings 1-stabile woude, 2-stabile woude, ensovoorts, van 'n spesifieke orde te bereken, word in Algoritme 1 in pseudokode-vorm gegee.

**Algoritme 1 STABIEL** ( $n, p, F, S_0, \dots, S_{p-1}$ )

**Toevoer:** Twee heelgetalle  $n > 1$  en  $p > 0$ , 'n nie-leë woud  $F$  van orde  $n$ , en  $p$  paarsgewys-disjunkte versamelings nie-leë woude  $S_0, \dots, S_{p-1}$ , waar  $S_i$  die versameling  $i$ -stabile woude van orde  $n$  voorstel, vir elke  $i \in \{0, \dots, p-1\}$ .

**Afvoer:** WAAR as  $F$   $p$ -stabil is, of VALS andersins.

1. As  $F \in S_i$  vir enige  $i \in \{0, \dots, p-1\}$ , lewer VALS en Stop
2. Doen vir elke lyn  $e$  van  $F$  die volgende
3. As  $\alpha(F - e) \neq \alpha(F)$  of  $F - e \in S_i$  vir enige  $i \in \{0, \dots, p-2\}$ , lewer VALS en Stop
4. Lewer WAAR en Stop



**FIGUUR 5:** Klassifikasie van die 19 nie-leë woude van orde 6 as  $p$ -stabil vir een of ander  $p \in \{0, \dots, 4\}$ . Die soliede punte dui  $\alpha$ -versamelings in elke geval aan en 'n pyl van die vorm  $G^* \rightarrow F$  dui aan dat  $G^*$  'n sertifikaat is met betrekking tot die  $p$ -stabiliteit van  $F$ , soos in Proposisie 7(c) beskryf.

Laat  $S_i$  die klas van  $i$ -stabile woude van orde  $n$  vir elke heelgetal  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  voorstel. Dan kan die klas van  $p$ -stabile woude van orde  $n$  gekonstrueer word deur agtereenvolgens elke lid  $H$  van  $S_{p-1}$  met minstens twee komponente te oorweeg, Algoritme 1 met die  $(p+3)$ -tal  $(n, p, H + uv, S_0, \dots, S_{p-1})$  as toevoer vir elke paar punte  $u$  en  $v$  in verskillende komponente van  $H$  te roep, en kennis te neem van al die strukture waarvoor die algoritme WAAR as afvoer lewer. Indien die eerste [respektiewelik, tweede] vereiste van die As-stelling in lyn 3 van Algoritme 1 bevredig word, dan word voorwaarde (a) [respektiewelik, (b)] van Proposisie 7 nie bevredig nie, in welke geval die betrokke woud  $F$  nie  $p$ -stabil is nie, en die algoritme VALS as afvoer lewer. Andersins is die woud  $G^* = H$  'n sertifikaat met betrekking tot die  $p$ -stabiliteit van  $F = H + uv$  in Proposisie 7(c), in welke geval die algoritme WAAR as afvoer lewer. Hierdie proses word in Figuur 5 vir woude van orde 6 gedemonstreer.

Algoritme 1 is gevalideer deur te verifieer dat dit die stergrafiek  $K_{1,n-1}$ , die boom in Figuur 2(a) en die pad  $P_n$  as onderskeidelik  $(n-2)$ -stabil, 0-stabil, en 0- of 1-stabil (afhangend van die pariteit van  $n$ ) vir klein waardes van  $n$  klassifiseer, soos teoreties deur Proposisies 5 en 6 bevestig. Die algoritme is daarna gebruik om die versamelings van  $p$ -stabile woude van klein ordes te bereken. Die kardinaalgetalle van hierdie versamelings word in Tabel 1 gegee.

**TABEL 1:** Kardinaalgetalle van die nie-leë versamelings  $p$ -stabile woude van orde  $n \in \{2, \dots, 8\}$  vir alle  $p \in \{0, \dots, n-2\}$ , soos deur Algoritme 1 bereken.

Woud orde $\rightarrow$	2	3	4	5	6	7	8
0-stabile woude	1	1	3	5	11	21	48
1-stabile woude		1	1	2	5	10	18
2-stabile woude			1	1	1	2	5
3-stabile woude				1	1	1	1
4-stabile woude					1	1	1
5-stabile woude						1	1
6-stabile woude							1
<b>Nie-leë woude <math>\rightarrow</math></b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>5</b>	<b>9</b>	<b>19</b>	<b>36</b>	<b>75</b>

## Induktiewe karakterisering van $q$ -kritiese woude

Dit is ook moontlik om die versameling van  $q$ -kritiese woude van orde  $n$  induktief te karakteriseer in terme van die versamelings van  $r$ -kritiese woude van orde  $n$  vir alle  $r < q$ .

### Proposisie 8

'n Woud  $F$  met minstens  $q - 1$  lyne is  $q$ -krities as en slegs as  
(a) daar 'n  $(q - 1)$ -kritiese deelwoud  $G^* \in F - 1e$  bestaan waarvoor  $\alpha(G^*) = \alpha(F)$ , en  
(b) elke deelwoud  $G \in F - 1e$  met  $\alpha(G) = \alpha(F)$   $r$ -krities is vir een of ander  $r \leq p - 1$ .

Bewys: Laat  $F$  'n  $q$ -kritiese woud wees, vir een of ander heelgetal  $q > 1$ . Gestel egter, in teenstelling met (b), dat daar 'n  $r$ -kritiese deelwoud  $G' \in F - 1e$  vir een of ander heelgetal  $r > q - 1$  bestaan waarvoor  $\alpha(G') = \alpha(F)$ .

Dan is

$$\begin{aligned} \min \alpha(F - qe) - \alpha(F) &= \min \alpha((F - 1e) - (q - 1)e) - \alpha(F) \\ &\leq \min \alpha(G' - (q - 1)e) - \alpha(G') \\ &= 0, \end{aligned}$$

wat die  $q$ -kritiekheid van  $F$  weerspreek, en dus die noodsaaklikheid van (b) bevestig.

Gestel verder, in teenstelling met (a), dat elke deelwoud  $G \in F - 1e$  waarvoor  $\alpha(G) = \alpha(F)$ ,  $r$ -krities is vir een of ander heelgetal  $r < q - 1$ . Dan bestaan daar 'n deelwoud  $G'' \in F - 1e$  waarvoor  $\alpha(G'') = \alpha(F)$  en

$$\begin{aligned} \min \alpha(F - (q - 1)e) - \alpha(F) &= \min \alpha(G'' - (q - 2)e) - \alpha(G'') \\ &> 0, \end{aligned}$$

wat weereens die  $q$ -kritiekheid van  $F$  weerspreek, en dus die noodsaaklikheid van (a) bevestig.

Omgekeerd, gestel voorwaardes (a) en (b) geld. Dan volg dit uit (a) dat daar 'n  $(q - 1)$ -kritiese woud  $G^* \in F - 1e$  bestaan waarvoor  $\alpha(G^*) = \alpha(F)$ . Verder is

$$\begin{aligned} \min \alpha(F - (q - 1)e) - \alpha(F) &= \min \alpha((F - 1e) - (q - 2)e) - \alpha(F) \\ &\leq \min \alpha(G^* - (q - 2)e) - \alpha(G^*) \\ &= 0, \end{aligned}$$

terwyl dit uit (b) volg dat daar 'n deelwoud  $\hat{G} \in F - 1e$  bestaan waarvoor  $\alpha(\hat{G}) = \alpha(F)$  en

$$\begin{aligned} \min \alpha(F - qe) - \alpha(F) &= \min \alpha((F - 1e) - (q - 1)e) - \alpha(F) \\ &= \min \alpha(\hat{G} - (q - 1)e) - \alpha(\hat{G}) \\ &> 0, \end{aligned}$$

---

### Algoritme 2 KRITIES ( $n, q, F, C_1, \dots, C_{q-1}$ )

---

Toevoer: Twee heelgetalle  $n > 1$  en  $q > 1$ , 'n nie-leë woud  $F$  van orde  $n$ , en  $q - 1$  paarsgewys-disjunkte versamelings nie-leë woude  $C_1, \dots, C_{q-1}$ , waar  $C_i$  die versameling  $i$ -kritiese woude van orde  $n$  voorstel, vir elke  $i \in \{1, \dots, q - 1\}$ .

Afvoer: WAAR as  $F$   $q$ -krities is, of VALS andersins.

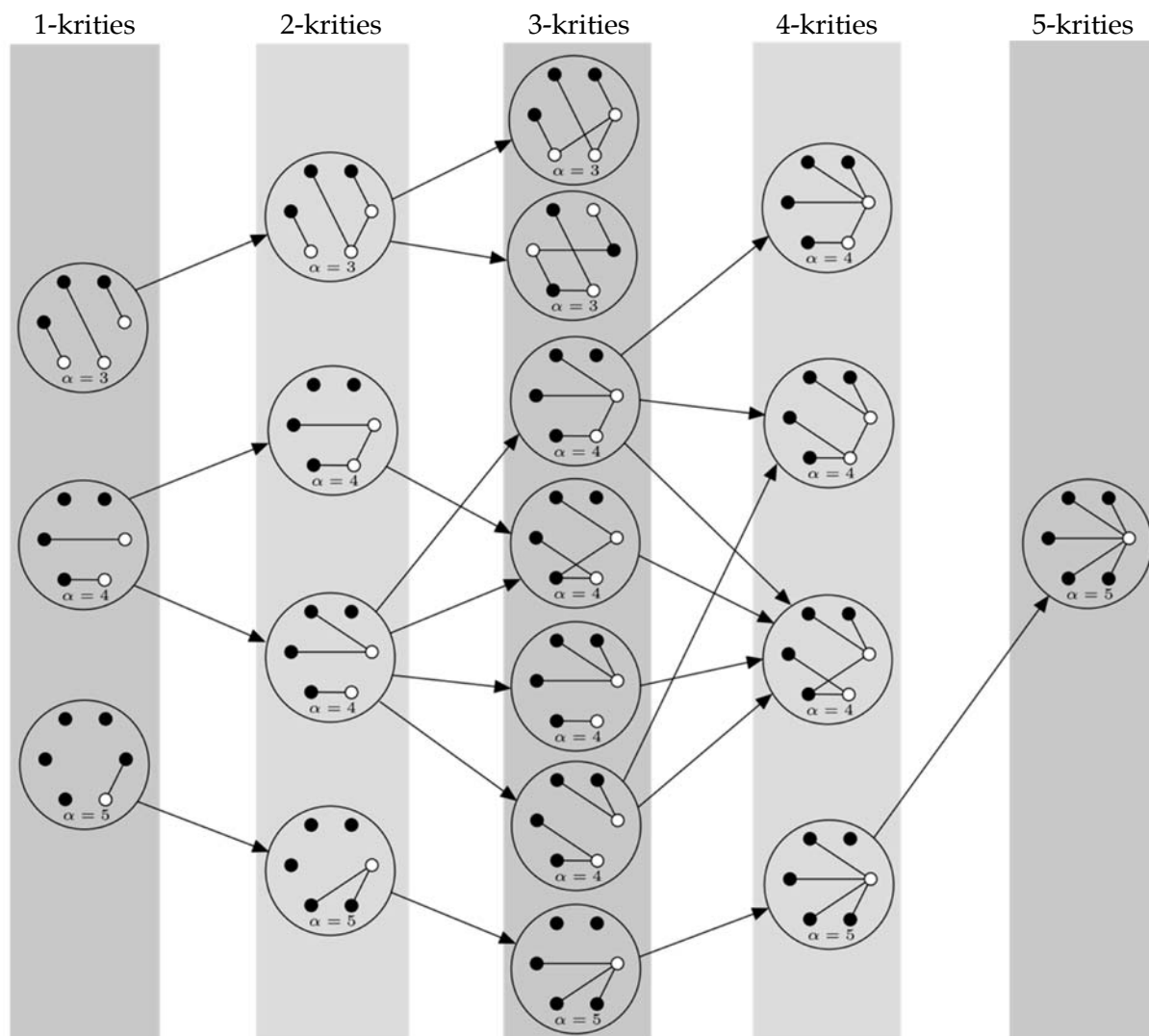
1. As  $F \in C_i$  vir enige  $i \in \{1, \dots, q - 1\}$ , lewer VALS en Stop
  2. Doen vir elke lyn  $e$  van  $F$  die volgende:
  3. As  $\alpha(F - e) = \alpha(F)$  en  $F \notin C_i$  vir alle  $i \in \{1, \dots, q - 2\}$ , lewer VALS en Stop
  4. Lewer WAAR en Stop
- 

wat aandui dat  $F$   $q$ -krities is en dus dat voordes (a)–(b) voldoende is vir die  $q$ -kritiekheid van 'n woud.  $\square$

Die deelwoud  $G^* \in F - 1e$  in Proposisie 8(a) word weereens 'n *sertifikaat* met betrekking tot die  $q$ -kritiekheid van  $F$  genoem. Die basisstap vir die induktiewe karakteriseringsproses wat deur Proposisie 8 gesuggereer word, is die karakterisering van 1-kritieke woude in Gevolgtrekking 1. Die induktiewe proses om 2-kritieke woude, 3-kritieke woude, ensovoorts, van 'n spesifieke orde te bereken, word in Algoritme 2 gegee.

Laat  $C_i$  die klas van  $i$ -kritiese woude van orde  $n$  vir elke heelgetal  $n \in \{1, \dots, q - 1\}$  voorstel. Dan kan die klas van  $q$ -kritiese woude van orde  $n$  gekonstrueer word deur agtereenvolgens elke lid  $H$  van  $C_{q-1}$  met minstens twee komponente te oorweeg, Algoritme 2 met die  $(q + 2)$ -tal  $(n, q, H + uv, C_1, \dots, C_{q-1})$  as toevoer vir elke paar punte  $u$  en  $v$  in verskillende komponente van  $H$  te roep, en kennis te neem van al die strukture waarvoor die algoritme WAAR as afvoer lewer. Indien beide die vereistes van die As-stelling in lyn 3 van Algoritme 2 bevredig word, dan word voorwaarde (b) van Proposisie 8 nie bevredig nie, in welke geval die betrokke woud  $F$  nie  $q$ -krities is nie, en die algoritme VALS as afvoer lewer. Andersins is die woud  $G^* = H$  'n sertifikaat met betrekking tot die  $q$ -kritiekheid van  $F = H + uv$  in Proposisie 8(a), in welke geval die algoritme WAAR as afvoer lewer. Hierdie proses word in Figuur 6 vir woude van orde 6 gedemonstreer.

Algoritme 2 is gevalideer deur te verifieer dat dit die ster-grafiek  $K_{1, n-1}$ , die boom in Figuur 2(a) en die pad  $P_n$  as onderskeidelik  $(n - 1)$ -krities,  $(n - 2)$ -krities, en  $\lceil n/2 \rceil$ -krities vir klein waardes van  $n$  klassifiseer, soos teoreties deur Proposisies 5 en 6 bevestig. Die algoritme is daarna gebruik om die versamelings van  $q$ -kritiese woude van klein ordes te bereken. Die kardinaalgetalle van hierdie versamelings word in Tabel 2 gegee.



**FIGUUR 6:** Klassifikasie van die 19 nie-leë woude van orde 6 as  $q$ -krities vir een of ander heelgetal  $q \in \{1, \dots, 5\}$ . Die soliede punte dui  $\alpha$ -versamelings in elke geval aan en 'n pyl van die vorm  $G^* \rightarrow F$  dui aan dat  $G^*$  'n sertifikaat is met betrekking tot die  $q$ -kritiekheid van  $F$ , soos in Proposisie 8(a) beskryf.

**TABEL 2:** Kardinaalgetalle van die nie-leë versamelings  $q$ -kritiese woude van orde  $n \in \{2, \dots, 8\}$  vir alle  $q \in \{1, \dots, n-1\}$ , soos deur Algoritme 2 bereken.

Woud orde $\rightarrow$	2	3	4	5	6	7	8
1-kritiese woude	1	1	2	2	3	3	4
2-kritiese woude		1	2	3	4	5	6
3-kritiese woude			1	3	7	10	15
4-kritiese woude				1	4	12	23
5-kritiese woude					1	5	20
6-kritiese woude						1	6
7-kritiese woude							1
<b>Nie-leë woude <math>\rightarrow</math></b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>5</b>	<b>9</b>	<b>19</b>	<b>36</b>	<b>75</b>

## Samevatting

Die klasse van  $p$ -stabile en  $q$ -kritiese woude van enige vaste orde is in onderskeidelik §4 en §5 volledig gekarakteriseer. Hierdie karakteriserings is induktief van aard, met basisstappe (die daarstelling van die klasse van 0-stabile en 1-kritiese woude) in onderskeidelik Waarneming 2(b) en in Gevolgtrekking 1. Die karakteriserings is gevalideer deur die stabiliteits- en kritiese waardes vir drie oneindige klasse bome teoreties na te gaan.

## Moontlike verdere werk

Die konsepte van  $p$ -stabiliteit en  $q$ -kritiekheid van woude is in hierdie artikel slegs in die konteks van lynverwydering oorweeg. Dit sal interessant wees om hierdie konsepte ook in die konteks van lyninvoeging in woude te bestudeer. Die feit dat lyninvoeging mag aanleiding gee tot die vorming van siklusse sal só 'n studie egter aansienlik bemoeilik. Juis as gevolg hiervan sal dit insiggewend wees om eers te poog om die induktiewe karakteriserings van  $p$ -stabiliteit



en  $q$ -kritiekheid in hierdie artikel te veralgemeen na sikliese grafieke (steeds in terme van lynverwydering). Só 'n veralgemening sal ook waardevol wees in terme van praktiese toepassings. Daar word nie voorsien dat die induksiestappe wat in Proposisies 7 en 8 vervat is, in die laasgenoemde veralgemeende konteks problematies sal wees nie. Dit mag egter moeilik wees om die klasse van 0-stabiele grafieke en 1-kritiese grafieke van enige gegewe orde te karakteriseer.

## Erkenning

Dr Anton de Villiers word bedank vir die generering van die grafika in hierdie artikel.

## Verwysings

- Berge, C., 1962. *Theory of graphs and its applications*. London: Methuen.
- Chartrand, G. & Oellermann, O. R., 1993. *Applied and algorithmic graph theory*. New York: McGraw-Hill.
- Chellali, M. & Rad, N. F., 2012. On  $k$ -independence critical graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, Volume 53, pp. 289-298.
- Grobler, P. J. P. & Mynhardt, C. M., 2001. Domination parameters and edge-removal-critical graphs. *Discrete Mathematics*, Volume 231, pp. 221-239.
- Gunther, G., Hartnell, B. & Rall, D. F., 1993. Graphs whose vertex independence number is unaffected by single edge addition or deletion. *Discrete Mathematics*, Volume 46, pp. 167-172.
- Ore, O., 1962. *Theory of graphs*. *Amer. Math. Soc. Transl.*, Volume 38, pp. 206-212.