Die moontlikhede van ’n modelleringsperspektief vir skoolwiskunde

The possibilities of a modelling perspective for school mathematics

DCJ Wessels
Departement Kurrikulumstudie, Universiteit van Stellenbosch
E-pos: dcjwessels@gmail.com

Dirk Wessels

Dirk Wessels is in die Vrystaat gebore in 1946 en het aan die Hoërskool Excelsior gematrikuleer in 1963. Hy het sy BSc en MEd in Wiskunde-onderwys aan die UOVS voltooi en later sy DEd aan Unisa. Hy het aan Paul Erasmus Hoërskool (Senekal), Hoërskool Trompsburg en Hoërskool Wolmaransstad Wiskunde en Skeinat aan die senior skoolklasse gegee. Daarna vanaf 1980 het hy vier jaar aan die Onderwyserskollege vir Verdere Opleiding (OKVO) in Pretoria klas gegee en het in Nov 1983 by Unisa begin in die Departement Didaktiek waar hy vir Didaktiek en die Vakdidaktiek Wiskunde (Wiskundeonderwys) verantwoordelik was wat hy onderrig het vir die afgelope 25 jaar.

In 1989 het hy sy DEd behaal en in 1996 medeprofessor en in 2006 vol professor geword. In Januarie 2009 het hy afgetree by Unisa, na die Strand in die Wes-Kaap verhuis en het op 1 Junie 2009 die pos van Buitengewone Mede-professor in Wiskundeonderwys in die Departement Kurrikulumstudie aan die Universiteit van Stellenbosch opgeneem.

Hy het in sy akademiese loopbaan 17 Meestersgraad en 11 Doktorsgraadstudente afgelewer in Wiskundeonderwys. Hy is tans by 8 nagraadse studente betrokke. Hy het talle skool wiskunde handboeke geskryf en ook ’n hoeveelheid artikels (as alleenouteur en saam met ander akademici) in akademiese en vakgerigte tydskrifte gepubliseer.

Dirk Wessels was born in the Free State in 1946 and matriculated at the Hoërskool Excelsior in 1963. He completed his BSc and MEd in Mathematics Education at UOFS and later his DEd at Unisa. He taught Mathematics and Physical Science to senior learners at Paul Erasmus Hoërskool (Senekal), Hoërskool Trompsburg and Hoërskool Wolmaransstad. He was appointed at the College of Education for Further Training (CEFT) in Pretoria in 1980; and he started his academic career as a Senior Lecturer at Unisa in the Department of Didactics in November 1983. He was responsible for Didactics and Subject Didactics of Mathematics (Mathematics Education) which he taught for 25 years.

He completed his DEd in 1989 and was promoted to Associate Professor in 1996 and to full professor in 2006. He retired from Unisa in January 2009, whereafter he moved to Strand in the Western Cape. He was appointed in the position of Associate-Professor Extraordinaire in Mathematics Education in the Deparment of Curriculum Studies at the University of Stellenbosch in June 2009.

During his academic career he supervised 17 masters and 11 doctorate students who successfully completed their studies and he is currently still involved in the supervision of eight post graduate students. He published a number of school mathematics textbooks, as well as authored or co-authored a number of articles published in scholarly academic journals.

ABSTRACT

The possibilities of a modelling perspective for school mathematics

The findings of the international TIMSS investigations of a few years ago into the position and application of problem solving strategies in school mathematics in about 50 countries caused serious concern globally. During each survey South Africa was found to be among the poorest performers of the participating countries. The main problem was that the majority of school learners in South Africa do not have the ability to solve mathematical problems; in fact, it would appear that they lack the total spectrum of mathematical problem solving competencies. The present school system does not develop their mathematical abilities or competencies. While Outcomes-based education, which became very popular in the Western world, has the ability to improve participants' affective values of mathematics, it proved to be inadequate in improving the quality of their mathematical performances.

Mathematics teachers are unsuccessful in teaching in a manner that will make a difference with respect to the way learners do, learn or perform in mathematics. The pedagogical and mathematics content knowledge of the teachers are lacking in conceptual depth, clarity and connectedness (integration). The language proficiency of the learners is poor, which means that they do not understand what they should do with a problem and how to interpret, present and verify their findings. Learners still do not know how to handle mathematics and how to utilise mathematics in order to solve problems. They seriously lack the ability to approach problems in a meaningful and constructive way. Real-life and open-ended problems are being perceived as huge obstacles to most learners. Teachers are not trained and educated to assist their learners in bridging this gap.

The teaching methodology that will make a difference in the classroom falls in the broad category of problem solving. The day-to-day teaching method should be the problem-centred teaching and learning approach. This rather complex teaching methodology requires in-depth thinking about the role of the teacher, the role of the learner, the nature of the classroom culture, the nature of the negotiation of meaning between the teacher and individuals or groups, the nature of selected problems and material, as well as the kind of integrative assessment used in the mathematics classroom. Modelling is closely related to the problem-centred teaching approach, but it also smoothly relates to bigger and longer mathematical tasks. This article gives a theoretical exposition of the scope and depth of mathematical modelling. It is possible to introduce modelling at every school phase in our educational sytem.

Modelling in school mathematics seems to make the learning of mathematics more effective. The mastering of problem solving and modelling strategies has definitely changed the orientation, the competencies and performances of learners at each school level. It would appear from research that learners like the application side of mathematics and that they want to see it in action. Genuine real life problems should be selected, which is why a modelling perspective is so important for the teaching and mastering of mathematics. Modelling should be integrated into the present curriculum because learners will then get full access to involvement in the classroom, to mathematisation, to doing problems, to criticising arguments, to finding proofs, to recognising concepts and to obtaining the ability to abstract these from the realistic situation. Modelling should be given a full opportunity in mathematics teacher education so that our learners can get the full benefit of it. This will put the mathematical performances of learners in our country on a more solid base, which will make our learners more competitive at all levels in the future.

KEY CONCEPTS: Modelling, mathematising, problem-centred teaching and learning, traditional mathematics teaching, connectedness, competencies, problem solving, representations, attitudes and beliefs in mathematics.

TREFWOORDE: Modellering, matematisering, probleemgesentreerde onderrig en leer, tradisionele wiskundeonderwys, gekonnekteerdheid, bevoegdhede, probleemoplossing, voorstellinge, houdings en geloof in wiskunde.

OPSOMMING

Die resultate van die Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) se ondersoeke na die stand van probleemoplossing en die toepassing van probleemoplossingstrategieë in skoolwiskunde in ongeveer 50 lande ’n paar jaar gelede het die wêreld geskud. Suid-Afrika het elke keer onder die laastes van die deelnemende lande geëindig. Uitkomsgebaseerde onderwys, wat in die Westerse wêreld al hoe meer algemeen word, laat al die deelnemers in daardie stelsels beter voel oor wiskunde, maar verbeter nie noodwendig wiskunde-prestasie nie. Modellering in die wiskundeklaskamer blyk ’n belangrike middel te wees om die leer van wiskunde meer effektief te maak. Die bemeestering van probleemoplossing en modelleringstrategieë en vaardighede sal beslis die oriëntasie, bevoegdhede en prestasies van leerders op elke skoolvlak verbeter. Dit blyk uit die navorsing dat leerders daarvan hou om wiskunde se toepassingskant te sien en te beleef. Egte probleme behoort gekies te word en daarom is ’n modelleringsperspektief in die onderrig en leer van wiskunde noodsaaklik. Modellering wat ook integrerend aangebied word in die wiskundekurrikulum het ook die vermoë om leerders op alle skoolvlakke ten volle betrokke te kry, om hulle beter toegang tot matematisering te gee, die wiskundige taal meer vloeiend te laat gebruik, probleemoplossings te doen, argumente te kritiseer, bewyse te vind en wiskundige konsepte te herken en te abstraheer uit ’n realistiese situasie. Modellering behoort ’n volle kans gegun te word in wiskundeonderwysersopleiding en in indiensopleiding sodat die leerders die volle voordeel daarvan kan beleef. Dit sal die wiskunde-prestasies van ons land se jeug op ’n stewiger grondslag plaas en hulle so hopelik meer mededingend in die toekoms maak.

1. INLEIDENDE ORIËNTERING

Daar is vandag ’n soeke na beter wiskundeonderwys op alle vlakke van die skoolwese. Min of meer dieselfde verhaal word by al die wiskundeonderwyskongresse oor die hele wêreld gerapporteer. Die Wiskundedepartemente aan universiteite is bekommerd oor die kwaliteit van eerstejaarstudente wat by hulle kom studeer. Elke internasionale en nasionale verslag beklemtoon die feit dat algemene geletterdheid sowel as wiskundeprestasies daal. Niemand huiwer meer om te sê dat skoolwiskunde in ’n krisis is nie. Al hoe meer geld en bronne word ingespan om die saak te beredder. Nuwe kurrikula is in die laaste dekade of twee ontwerp en geïmplementeer en het reeds talle veranderings ondergaan. Onderwysers is voortdurend onder skoot en al hoe meer eksterne eksamineringstelsels word in gereedheid gebring om as vergelykende meetinstrumente te dien. Owerheidsinstansies weet eintlik nie hoe om die uitslae daarvan te hanteer nie. Die Amerikaners, soos die res van die wêreld waaronder Suid-Afrika, is baie bekommerd oor die kwaliteit van wiskundeonderwys in hul skole – hulle het onlangs geweldige bedrae geld aan die probleem bestee (NMP, 2006). In Suid-Afrika is die probleem rondom skoolwiskunde baie groot, soos talle bydraes in hierdie uitgawe van die SATNWT dit beskryf. Prestasie in skoolwiskunde is maar een aspek en ook die sigbaarder resultaat van hierdie probleem.

Te midde van hierdie nimmereindigende debat wil ons die fokus van hierdie artikel plaas op modellering en die metodologiese kwessies in wiskundeonderwys. Eerstens kyk ons na enkele filosofiese en metodologiese standpunte en daarna word modellering met enkele verduidelikende definisies aan die orde gestel en verder geanaliseer. Daarna word die verband tussen probleemoplossing en modellering bespreek, asook die verskil en raakpunte tussen modellering en matematisering. Daar word onder meer gekyk na enkele voorbeelde van modellering in (leerders se) navorsing, asook na enkele groot projekte in die VSA wat modellering as uitgangspunt gebruik het. Die primêre doel van die artikel is om die rol van modellering in skoolwiskundeonderwys te beredeneer. Daar sal aangetoon word dat modellering die sentrale didaktiese werkswyse behoort te wees, voordat effektiewe onderrig van en leer in skoolwiskunde kan realiseer.

2. DIE VERBAND TUSSEN KENNIS, METODOLOGIE EN ONDERRIG

Die veranderinge in sieninge rondom filosofiese uitgangspunte van kennis loop deur na metodologiese sieninge. In Wiskundeonderwys is dit net so waar soos in enige ander vakwetenskap en ontwikkelende studieveld. Dossey, McCrone, Giordano en Weir (2002: 8) verklaar dat "[t]he conception of mathematics held by teachers significantly influences how they teach it". So sal 'n persoon wat sterk **platonistiese** sieninge het neig om wiskunde as 'n struktuur aan te bied wat buite die leerder se denke en ervaringe lê. Die fokus is daar op die ontwikkeling van algemeen geldige reëls en konsepte wat gestroop is van enige egtewêreld-kontekste. Dit was die **positivisme** met sy strak en rigiede natuurwetenskaplike metodologiese oorheersing wat baie sterk aanleiding gegee het tot die vestiging van die tradisionele onderrig- en leerbenadering (transmissiegerigte benadering) wat nog steeds in baie vorme oorheersend in Suid-Afrika se skole voorkom. Dit is 'n wêreldwye verskynsel met 'n bepaalde siening oor die samehang tussen teorie en praktyk wat beteken dat die teoretiese beginsels van die positivistiese epistemologie direk op vakinhoudelike metodologiese kursusse deur onderwysers in daardie velde toegepas word (Cobb 2007: 4-5). Die **tradisionele benadering** (die direkte oordrag van kennis) weerhou die leerders van die geleentheid om hul eie betekenisse te konstrueer (Anderson, Reder & Simon in Cobb 2007:5). Die deurslaggewende geloof van hoe leer vir hulle plaasvind, was egter altyd deel daarvan, naamlik dat kennis in sy klaar verwerkte vorm netso direk oorgedra kan word van die pratende onderwyser (dosent) na die passief luisterende student (leerder). Die **formalisme** soek sterk na die aksiomatisering en formalisering van bevindinge, denke en stellings en hiertydens laat dit min ruimte vir die induktiewe en prosesmatige. Hierdie werkswyse van die formalisme het spoedig gelei tot die oplewing van die strewe na onafhanklikheid van vakgebiede. Die noodsaaklike erkenning van onderlinge samehang en gekonnekteerdheid het geen of min aandag gekry. Dit het 'n groot (negatiewe) bydrae gelewer tot die kompartementalisering van denke, kurrikula en die onderwys van vakwetenskappe.

Konstruktivisme en die **intuïsionisme** het veel gemeen (laasgenoemde sluit eersgenoemde feitlik heeltemal in). Die intuïsionisme is 'n bepaalde kennissiening wat verklaar dat intuïsionistiese eksistensie vereenselwig moet word met konstrueerbaarheid en dat hierdie konstrueerbaarheid slegs opgebou kan word deur 'n eindige aantal stappe van konstruksies van natuurlike getalle. Luity en Brouwer erken net die bestaan van die aftelbare oneindige maat.[1] Die konstruktivistiese siening van kennis is dat elke mens se siening oor 'n bepaalde saak uniek is. Von Glasersfeld (1989) verklaar dat ander persone se weergawes van wiskundige teoremas hul eie hipotetiese

[1] Kyk Wessels (1982); Wessels (1989); en Benacerraf & Putman (1964).

entiteite is wat gekonstrueer is deur die denkende subjek, om sodoende rekenskap te gee van sekere oënskynlike reëlmatighede in sy ervaringswêreld. Wessels (2000:144) dui aan dat konstruktivisme en intuïsionisme in wiskunde en in wiskundeonderwys hand aan hand loop:

> Konstruktivisme is verwant aan die intuïsionistiese denkrigting en is 'n belangrike alternatief vir transmissiegerigte onderrig – Paul Cobb noem dit die voorstellende benadering ("representational"). … Die konstruktivisme het sy weg na die lig gevind deurdat hy saam met die kwasi-empirisme sy doel geplaas het in die praktyk van die wiskunde. Hiervolgens is wiskundekennis feilbaar en verbeterbaar en is dit 'n afgebakende kennisveld wat regverdiging of herinterpretasie nodig het.

Die tekortkominge van die intuïsionisme, soos ook by die konstruktivisme, is dat die beginsels van universaliteit en veralgemening nie tot hul reg kom nie. Te veel klem word gelê op die individualiteit en uniekheid van gebeure en fenomene. Daarom is die kosmologiese siening van belang wat by die individuele en unieke elke keer ook soek na die universele en die algemene. Dit gaan oor die gelykluidende erkenning van hierdie belangrike beginsels in kurrikulumontwerp en vakonderwys wat die kind 'n ontsluite en gebalanseerde siening gee op die geskape werklikheid.

Dit is dan ook deels in reaksie teen die kostruktivistiese en formalistiese kenmerke dat die **beginsels van gekonnekteerdheid en integrasie** so kragtig deurwerk in die hervormingsaksies met betrekking tot skoolwiskunde. In die voorwoord van die boek *Connected Geometry* (The Connected Geometry Development Team, 2000: xi) word die beginsel van "connectedness" verduidelik:

> ... [M]athematics produces results: new facts, ideas, or ways of doing things.... Yet the *methods* mathematicians use to *find* these facts – *the mathematical ways – of looking at things* – are extremely important and useful ... This book ... contains activities that are *organized* to help you develop the mathematical ways of thinking *behind* these ideas. We sometimes refer to them as 'Habits of mind'.

Die Amerikaners het die voortou geneem om 'n deeglik nagevorste en uitgetoetste skoolwiskundekurrikulum te implementeer. Hierdie uiters moderne kurrikulum is egter opsioneel as gevolg van die geweldige mag van lokale owerhede in die VSA – elke skool kan sy eie kurrikulum volg. Die National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) in die VSA het hierdie opsionele, maar nasionale skoolwiskundekurrikulum, die *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, in 1989 ontwikkel, wat opgevolg is deur standaarde vir onderrig sowel as vir assessering. In 2000, toe die navorsing en loodsperiode hiervan afgehandel is, is alles saamgevat in die *Principles and Standards for School Mathematics* (PSSM). Die struktuur van hierdie PSSM is sodanig dat dit op die eerste vlak bestaan uit ses *principles*, naamlik die "equity", "curriculum", "teaching", "learning", "assessment" en die "technology"-beginsels. Die volgende vlak word gedefinieer deur twee stelle s*tandards*: vyf *content standards* (dit is getal en bewerkings, algebra, meetkunde, meting, en data-analise en waarskynlikheid) en vyf *process standards* (dit is probleemoplossing, beredenering en bewysvoering, kommunikasie, konneksies en voorstellingswyses).

Suid-Afrika se modernisering van sy **skoolkurrikula** het in 1996 begin met die nuwe Konstitusie van die RSA (Wet 108 van 1996). Kort daarna is Kurrikulum 2005 in die Nasionale Kurrikulumverklaring (NKV) aangekondig wat die Uitkomsgerigte Onderwysbenadering (UGO) bevat, wat in 2002 opgegradeer is met die Hersiene NKV. Die UGO het leerareas (vakke en vakgroepe) aangekondig met leeruitkomste en assesseringskriteria (standaarde vir inhoud en assessering) geformuleer. Die prosesgerigte beginsels van die NCTM kom hierin voor, maar is yl versprei dwarsdeur die Suid-Afrikaanse kurrikulum.

Daar sal later verwys word na enkele projekte in die VSA wat hierdie vyf standaarde en beginsels sterk dra. Gelukkig word die gees van hierdie beginsels en standaarde sterk beklemtoon in die Suid-Afrikaanse Nasionale Kurrikulumverklaring wat tans in Graad R-12 in ons skole in werking is. In die NKV van Graad 10-12 (Departement van Onderwys, 2003) kom daar talle verwysings na modelle en wiskundige modelle voor. Wanneer die kurrikulum bestudeer word, is dit duidelik dat die gees en toon daarvan ’n ryk bedding bied vir deurslaggewende rigtingbepalers in die onderrig daarvan, soos integrasie, gekonnekteerdheid, modellering, die takel van egtewêreld-probleme, en ryk kontekste. Die aard van die kurrikulum en die soort navorsing wat leerders daaroor doen, bevestig dat al die moontlikhede van modellering na vore gebring kan word.

3. DIE ANALISE VAN MODELLERING

3.1 Modellering en enkele sieninge van wiskunde

Modellering en modelle kan in elke vakwetenskap voorkom, maar dit is kenmerkend daarvan dat daar baie dikwels van wiskunde gebruik gemaak word. Modellering staan in direkte verband met die oplos van probleme uit die alledaagse lewe en praktyk. Modellering en modelle het in die konteks van wiskunde en wiskundeonderwys twee soorte beklemtoning: die een is die strenger toegepaste wiskundige betekenis en die ander dui meer op ’n wyer “verstaan-van-wiskunde”-beklemtoning. Die volgende definisie van Dossey et al. (2002: 9) slaan terug op ’n dieper wiskunde-betekenis, maar verwys na al twee soorte beklemtoning:

> Mathematical modeling is central to understanding the real world, while simultaneously developing worthwhile mathematics. Modeling generally develops significant mathematics from basic concepts and principles, and uses it to understand, predict, and control events in the real world.

Wanneer na die dieper betekenis van modellering en modelle in wiskunde gevra word, moet ons kyk na sieninge oor die aard van wiskunde wat die invalshoeke op modellering en sy waarde-bepaling beïnvloed. Minder sterk-gefundeerde sieninge fokus op die funksionering en gebruike van wiskunde. Hierdie sieninge hou beslis verband met die laaste twee (vroeër genoemde) filosofiese vertrekpunte:

- Toepassings van wiskunde, met ander woorde hoe wiskunde elke dag gebruik kan word.
- Ander sal slegs na probleemoplossing, redenering en voorstelling verwys.
- Moderner sieninge fokus op integrasie en gekonnekteerdheid.

Laasgenoemde siening mag dalk meer ’n uitvloeisel wees van die deurwerking van ’n kosmologiese perspektief waar die soewereiniteit en uniekheid van die werklikheidsaspekte sterk verreken word.

Die laaste twee sieninge hierbo en die moderne beklemtoning het die pad gunstig voorberei vir die implementering van dinamiese onderrigbeginsels soos modellering en integrasie. Die konstruktivisme het sterk die voortou geneem in die oriëntering van die kurrikulum, wat die geleentheid gebied het vir modellering om te ontwikkel as een van die grondpilare vir wiskundeonderwys soos dit vandag daar uitsien.

3.2 Enkele woordverklarings en definisies

Die konsep van **modellering** is baie nou gekoppel aan 'n gebalanseerde en gekonnekteerde siening van wiskunde. In die verdere analise van die modelkonsep is dit Romberg, Carpenter en Kwako (2005:15) wat dit stel dat

> [.].. models are conceptual systems that represent phenomena in the world by means of a system of theoretically specified objects, relations, operations, and rules governing interactions.

Hulle onderskei tussen twee soorte modelle (Romberg et al., 2005:13). Die twee beskrywings is "a model as *a natural process* used to construct an explanation of natural phenomena" en "a model as *a representational tool* for communicating about the conceptual referent". Albei hierdie modelle begin met 'n fenomenologiese konteks as gebeurtenis, vraag en probleemsituasie wat sleuteleienskappe van die fenomeen identifiseer en beskryf hoe die eienskappe verband hou met mekaar. Albei konsepsies gebruik voorstelling as werktuig om dissiplinêre praktyke soos kommunikasie, mobiliteit, samehang, seleksie en vooruitskatting te ondersteun. Daar is egter verskille in die gebruik van die term *model*, die eienskappe wat beklemtoon word en die regverdiging van die modelle.

'n Verskeidenheid tegniese en alledaagse betekenisse kan toegeken word aan die term *model*, afhangende van die persoon wat dit definieer. 'n Werkbare definisie wat algemeen in die veld van wiskunde, statistiek, fisika, chemie en ander fisiese wetenskappe geld, is:

A model is a system consisting of
- (a) *elements*,
- (b) *relationships* among elements,
- (c) *operations* that describe how the elements interact, and
- (d) *patterns or rules*, such as symmetry, commutativity, or transitivity, that apply to the preceding relationships and operations. (Lesh & Doerr, 2000: 362)

Die patroonmatigheid wat hierbo genoem word, dien as basis om voorspelling ("predicting") te doen met behulp van modelle en modellering. Dit is 'n belangrike eienskap van modellering.

Wanneer daar egter na meer gestruktureerde raamwerke soos wiskundige modelle en modellering gekyk word, is dit Romberg et al. (2005:13) wat die volgende aandui:

> …[M]eaningful inquiry, involving cycles of model construction, model evaluation, and model revision, is central both to understanding in a domain and the professional practice of both mathematicians and scientists.

Hier kan duidelik gesien word dat talle professionele wiskundiges en wetenskaplikes modellering fundamenteel tot hul daaglikse werk sien. Die feit dat modelle divers is en wyd gebruik word deur talle dissiplines, beteken dat modellering leerders kan help om 'n groot verskeidenheid van belangrike wiskundige en wetenskaplike idees te verstaan. Modellering moet daarom op elke ouderdom en graad as praktyk gekoester en bevorder word.

3.3 Gekonnekteerdheid en balans

Ons gaan dieper kyk na hierdie twee baie belangrike eienskappe van die beoefening van skoolwiskunde. Hierdie twee eienskappe speel 'n groot rol in die oriëntasie en aanpak van wiskundeprobleme wat op sy beurt weer uitloop op die ontwikkeling van 'n modellerings-perspektief. Die onderskeie idees in wiskunde bestaan nie geïsoleerd en sonder samehang nie. Hulle is op bepaalde wyses geïntegreer en gekonnekteer, wat só hul onderlinge afhanklikheid in strukturele verband bepaal en ook spesifieke toepassings beïnvloed. In die HNKV (Departement van Onderwys, 2002: 5) word duidelik verwys na die wiskundige kennis, vaardighede en waardes wat elke leerder moet ontwikkel sodat wiskundige kennis en vaardighede oorgedra kan word tussen verskillende leerareas en binne die wiskunde-leerarea self. O'Daffer *et al*. (2002:48) verklaar die volgende:

> **Connections** can be found between different representations of an idea or problem, between mathematical generalisations and between mathematics and the real world. When mathematics is viewed according to this interpretation, it is considered a logical, coherent subject where learning about one aspect builds upon other knowledge and creates the foundation for other ideas.

En verder op pp.48-51:

> A **balanced** view of mathematics looks upon mathematics as an activity concerning skills, concepts, relationships and higher-level processes. ….. Higher order processes such as reasoning, problem solving and pattern finding are essential to doing mathematics and stress the importance of communicating mathematical ideas… …. This development of higher order reasoning processes are realised through structured frameworks.

Die projekte in die VSA waarna verwys is, vertoon almal juis hierdie kenmerke. Daar is onder andere die volgende drie projekte waar die naam direk dui op gekonnekteerdheid:.

Connected Mathematics Project (CMP); Michigan
Connected Geometry (EDC); Newton
MATH Connections Project; Connecticut

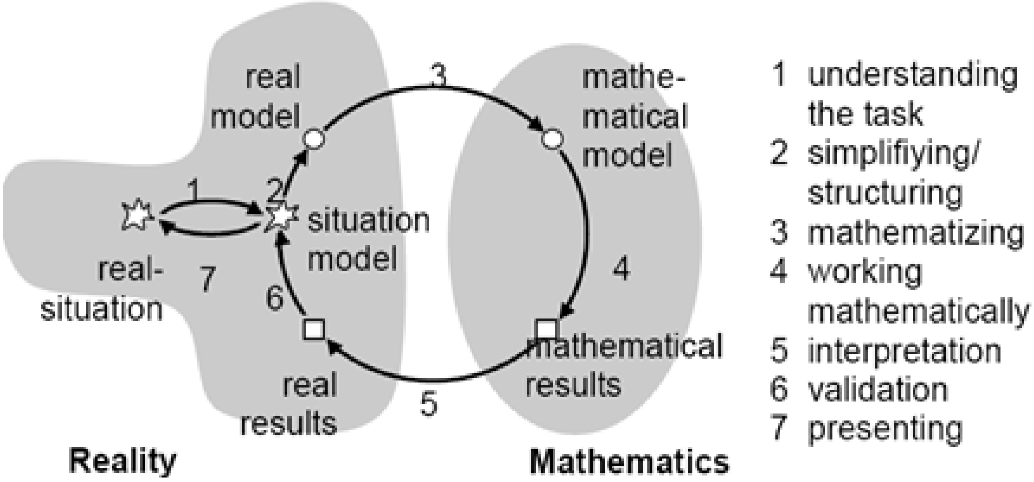
Die eerste twee is vir die middelskool en die laaste een is vir Graad 10 tot Graad 12. Wanneer die tipe probleme ontleed word, is dit oop probleme wat sterk realiteitsgerig is. Dit is natuurlik gunstig vir modellering.

3.4 Modellering as verstaan en leer van wiskunde

Daar is 'n groot aantal outeurs in wiskundeonderwys wat oor modellering geskryf het.[2] Hulle het individueel en ook saam met ander outeurs talle publikasies die lig laat sien. Dit is interessant dat hulle en ander outeurs wat hieroor skryf almal uit die geledere van die probleemgebaseerde wiskundeonderwysbenadering kom. Modelle en modellering word deur Lesh en Doerr (2000: 361) beskou as " … a unifying theme … in order to gain insight into the growth of student learning".

---

[1] Kyk Wessels (1982); Wessels (1989); en Benacerraf & Putman (1964).



Figuur 1: *Die modelleringsproses (Blum & Leiss in Boromeo Ferri 2006: 87)*

Uit Figuur 1 wat 'n voorstelling van die modelleringsproses aandui, blyk dit dat daar met modellering tussen die realiteit en wiskunde beweeg word. Die modelleringsproses begin met 'n egtewêreld-probleem. Deur dit te vereenvoudig, te struktureer en te idealiseer beweeg jy nader aan 'n reële model. Die matematisering van 'n egtewêreld-probleem lei na 'n wiskundige model. Deur in wiskunde te bly werk, kan 'n wiskundige oplossing moontlik gemaak word. Die oplossing moet eers geïnterpreteer en dan gevalideer (evalueer) word (Blum in Maaβ 2006:115). Indien die gekose pad nie uitloop op 'n sinvolle realiteitsoplossing nie, moet die hele modelleringsproses weer deurgewerk word. Hiervan is Figuur 1 'n duidelike voorstelling. Hierdie illustrasie van die modelleringsproses is nie 'n algoritme wat op 'n lineêre manier deurgewerk moet word nie. Dit is waar dat die konstruksie van die reële model beïnvloed word deur jou eie wiskundige kennis.

In hul poging om modellering te analiseer, het Lesh en Doerr (2000:362) verwys na die wiskundige model en die konseptuele sisteem wat so bestaan dat laasgenoemde selde funksioneer sonder die ondersteuning van kragtige "werktuie" ("tools") of voorstellingsisteme. Hierdie werktuie en voorstellingsisteme is geïntegreer in die konseptuele struktuur en mag elektroniese ornamente, maar veral gespesialiseerde simbole, taal, diagramme, organisatoriese sisteme en ervaringsgerigte metafore betrek. So word 'n werktuig in die leer van wiskunde 'n integrale deel van die handeling van beredenering in die denkwêreld van die kind. Hierdie werktuig is dan nie heeltemal buite die beredeneringsproses nie en die beredeneringsproses is nie volkome in die kop van die leerder nie.

Die status en posisie van voorstelling of voorstellingswyses in die leer van wiskunde waar modelle en modellering ter sprake is, word deur Lesh en Doerr (2000:363) deeglik bespreek. Daar is 'n noue verband tussen modelle (konseptuele sisteme) en 'n verskeidenheid van interaktiewe voorstellingsisteme soos geskrewe simbole, gesproke taal en woorde, prente of diagramme, konkrete materiale of ervaringsgerigte metafore. Die term *modelle* beklemtoon die dinamiese en interaktiewe eienskappe van die sisteme wat gemodelleer word, terwyl die term *voorstelling* die aandag vestig op die voorwerpe binne hierdie sisteme. Modelle neig om die funksionering van geheelsisteme te beskryf terwyl voorstelling meer gehanteer word as die interne versameling van voorwerpe waarby manipulasies en verwantskappe gevoeg moet word voordat dit kan funksioneer.

Modellering behels verder die interaksies tussen drie sisteme, naamlik die interne konseptuele sisteem (modelle), die voorstellingsisteem (wat beide funksioneer as eksternaliserings van interne konseptuele sisteme en van internaliserings van eksterne sisteme) en die eksterne sisteem wat in die natuur voorkom of wat gekonstrueer is deur mense (artefakte). Hierdie drie sisteme oorvleuel grootliks en is in dinamiese interaksie met mekaar (Lesh & Doerr, 2000:363-364).

3.5 Probeemoplossing en modellering

Probleemoplossing het sedert die dae van Georg Polya (1945) wiskundeonderwys binnegedring, maar eers in die laat sewentigerjare beduidende invloed begin uitoefen. Sir Bill Cockcroft (1982) het voorspel dat probleemoplossing die sentrale tema van wiskunde sal word in die tagtigerjare. Amerika se opsionele kurrikulum van die NCTM het in 1989 die pad verder oopgemaak vir die latere insig in en benutting van diepgaande en geïntegreerde probleemoplossing en modellering in die skoolwiskundekurrikulum. Probleemoplossing het ontwikkel met die doel om te dien as ’n breë funderingsraamwerk wat moes geld vir alle aspekte en vir die volle spektrum van onderrig in wiskunde. Schroeder en Lester (1989:32, 33) het, nadat hulle die geskiedenis en ontwikkeling van probleemoplossing bestudeer het, verklaar dat daar drie soorte probleemoplossings na vore gekom het in die poging om wiskunde suksesvol te onderrig. Dié drie is die onderrig van wiskunde *oor (about)* probleemoplossing, die onderrig van wiskunde *vir (for)* probleemoplossing en die onderrig van wiskunde *deur (through)* probleemoplossing.

Confrey en Kazak (2006: 307) bevind in hul ontleding van die rol van konstruktivisme in wiskundeonderwys dat probleemoplossing in sy vroeë ontwikkeling swaar geleun het op Polya se model. Polya se benadering het aangedui dat wiskunde meer was as “ … a set of definitions, theorems, and proofs and acknowledge the central role of problems in generating new solutions, propelling the field forward”. Hieruit het die gebruik ontstaan van die onderrig van wiskunde *oor (about)* probleemoplossing. Daar was ’n vraag na die gebruik van oplossingstrategieë en ’n toenemende klem op meta-kognitiewe handelinge. Die fundamentele gedagte in probleem-oplossingfilosofieë was egter dat

> [.].. the problems existed independent of the solver, and by learning a fruitful set of techniques, solutions could be more easily and effectively be sought…. As a result, problem solving was viewed as an acceptable extension to mathematics, not challenging in any fundamental way the epistemological character of the enterprise, but only extending and enhancing it. Debates focused typically only on how much time should be devoted to it. (Confrey & Kazak 2006: 307)

Schroeder en Lester (1989:32, 33) dui aan dat onderrig *vir* probleemoplossing ontstaan het met die behoefte om verkreë kennis deur gedane wiskundige probleemoplossing oor te dra na ander kontekste waarin die wiskundige konsep en strukture verskyn. Dus is hierdie aktiwiteit gebruik nadat leerders ’n nuwe konsep of algoritme geleer het wat toegepas moes word. Hierdie benadering het leerders se wiskundige denke beperk omdat hulle nie aangemoedig is om hul eie oplossings te vind nie, maar voorsien is van een algoritme wat hulle daar moes inoefen.

In die onderrig van wiskunde *deur of via* probleemoplossing word probleme gekies en gebruik as beide ’n doel om wiskunde te leer en as die enigste wyse waarop wiskunde geleer kan word. ’n Probleemsituasie is die vertrekpunt terwyl strategieë en tegnieke deur die leerders self ontwikkel word as hulle in die proses beweeg van

> [.].. the concrete (a real-world problem that serves as an instance of the mathematical concept or technique) to the abstract (a symbolic representation of a class of problems and techniques for operating with these symbols). (Schroeder & Lester 1989:33)

Wanneer na die verband tussen probleemoplossing en modellering gevra word, is dit belangrik om daarop te let dat probleemoplossing ’n vereenvoudigde vorm – net een siklus – van modellering is. Modellering kan veelvoudige siklusse van probleemoplossing bevat. Lesh en Doerr (2000: 378) bevestig dit wanneer hulle die rol van modelontlokkende aktiwiteite (“model-eliciting activities”) bespreek. Nie-roetine-probleme vereis dikwels meer as een modelleringsiklus wanneer daar gevorder moet word van die gegewe na die doel van die probleem.

> …… [T]raditional problem solving is a special case where only one modeling cycle is needed. In model-eliciting tasks, there are of necessity multiple modeling cycles, with multiple ways of thinking about givens, goals, and solution paths… In modeling it is the interpretation and the model itself that are constructed, modified, refined or extended.

Polya se bekende probleemoplossingmodel met sy vier fases maak voorsiening daarvoor om oor te gaan na modellering wanneer die plan wat gemaak is, nie uitwerk of voldoende werk nie en ’n ander plan gemaak moet word. In die volgende twee raamwerke kan die ooreenkoms tussen die probleemoplossingsmodel (Polya) en die modelleringsmodel (Dossey et al.) duidelik gesien word.

Polya se model:

Stap 1: Verstaan die probleem.
Stap 2: Maak ’n plan.
Stap 3: Voer die plan uit.
Stap 4: Toets die oplossing.

Dossey et al. (2002:115-117) se model:

Stap 1: Identifiseer die probleem.
Stap 2: Maak aannames.
- Identifiseer en klassifiseer veranderlikes.
- Bepaal interafhanklikhede tussen die veranderlikes en submodelle.

Stap 3: Los die model op en interpreteer die model.
Stap 4: Verifieer die model.
- Spreek dit regtig die probleem aan?
- Maak dit sin?
- Toets dit met egtewêreld-data.

Stap 5: Implementeer die model.
Stap 6: Onderhou die model.

Wiskundige probleemoplossing se teoretiese basis was in die laaste twee dekades en meer onder druk om te vernu. Lesh en Zawojewski (2007:765) dui aan dat in die 10-jaar-siklusse van nuwe idees en beklemtoning in die VSA se wiskundeonderwys wat hulle geïdentifiseer het, die klem na leerder-interpretasies, -voorstellings en -refleksies verskuif het. Dit is te midde van die gewone perspektief op berekeninge, deduktiewe redeneringsprosesse, vaardigheidsvlakprestasies met reëls en prosedures wat hulle ontwikkel en uitvoer. Die studie van probleemoplossing behoort altyd plaas te vind in die konteks van die leer van wiskunde (en omgekeerd). Wanneer daar na die omvattende verwantskap tussen leer en probleemoplossing gesoek word, word 'n beeld van probleemoplossing en leer gesien as "… *mathematical models and modeling,* where a problem situation is interpreted mathematically, and that interpretation is a mathematical model (p. 765)". In die volgende diagram (Figuur 2) kan gesien word hoe die "swaai" na modellering die siening van probleemoplossing verander het.

Tradisionele perspektief op probleemoplossing Toegepaste probleemoplossing word beskou as 'n deelversameling van tradisionele probleemoplossing.	**Model-en-modelleringsperspektief op probleemoplossing** Tradisionele probleemoplossing word gehanteer as 'n deelversameling van toegepaste probleemoplossing.
Die leer van die oplos van egtewêreld-probleme word hier deur vier stappe gedoen: 1. Bemeester die voorvereiste idees en vaardighede in gedekontekstualiseerde situasies. 2. Oefen die nuutgeleerde idees en vaardighede by woordprobleme wat hul leen tot die toepassing van die bepaalde prosedures. 3. Lewer algemene inhoud-onafhanklike probleemoplossingsprosesse en heuristieke. 4. Dan (as die tyd dit toelaat) leer om die voorafgaande idees, vaardighede en heuristieke in morsige egtewêreld-situasies (dit is toegepaste probleme) te gebruik waar addisionele inligting moontlik benodig word.	Om toegepaste probleme op te los beteken om die wiskundige "verstaan" van die probleem te bevorder (deur bv. parafrasering, trek van diagramme, ens.) tesame met die ontwikkeling van 'n betekenisvolle oplossing. "Verstaan" word nie beskou as 'n alles-of-niks situasie nie en wiskundige idees en probleemoplossingsvermoëns ontwikkel saam in die probleemoplossingsproses. Die konstrukte, prosesse en vermoëns wat nodig is om egtewêreld-probleme op te los (dit is toegepaste probleme), word beskou as intermediêre fases van ontwikkeling, eerder as vooraf bemeester voordat betrokkenheid by probleemoplossing gaan plaasvind.

Figuur 2: *Beskouinge oor probleemoplossing: tradisioneel vs. modellering*

Daar is 'n nuwe visie op probleemoplossing nodig en modellering is gereed om die mantel verder te dra. Uit bostaande beredenerings kom dit sterk na vore dat die oplos van komplekse en realistiese probleme slegs aan die einde van die onderrigsessie (as die tyd dit toelaat) gedoen kan word. In hierdie tradisionele raamwerk is toegepaste probleme waar wiskundige modellering vereis word, 'n klein deeltjie van probleemoplossing-ervaringe waarin leerders betrokke raak. In die model-en-modelleringsperspektief is die uitgangspunt dat die leer van wiskunde *deur* modellering plaasvind (Lesh & Zawojewski 2007: 783). Leerders bring hul eie persoonlike betekenis na 'n probleem en dit word getoets en hersien oor 'n reeks modelleringsiklusse. Hierdie proses word ondersteun deur 'n sterk groei in verstaan van beide die probleemsituasie as hul eie matematisering van die probleem. Dit is hier waar die leer van probleemoplossing en die leer van wiskunde integreer. Dus is die probleemoplossing-ervaringe van leerders die dryfveer vir die konvensionele kurrikulum en tradisionele storieprobleme is dan ’n deelversameling van die toegepaste probleme waardeur die leerders wiskunde leer.

Die Deense Wiskunde-onderwyskundige, Tomas Jensen, het in ’n voordrag by ’n kongres oor modellering (2007) gesoek na die unieke momente wat wiskundige probleemoplossing en modellering identifiseer en onderskei. Hy onderskei prosesse en subprosesse in ’n wiskundige probleem. Modellering kom sterk na vore wanneer daar ’n duidelike “openheid” by die probleem betrokke is. Geen subprosesse word aangedui in dit wat van die probleem gegee word nie. Hy verskaf twee probleme om dit te illustreer: die eerste is ’n modelleringsprobleem (P1: What is the relation between one’s income and the tax paid?), en die tweede is ’n probleemoplossingprobleem (P2: How does the taxes one pays depend on the income tax and the VAT?). Daar is meer besonderhede in P2 as in P1 teenwoordig; dus word daar ’n bepaalde rigting aangegee – dit dui op subprosesse in P2 wat nie in P1 is nie. Sy analise is verder op bekwaamhede (“competencies”) gebaseer en hy dui aan dat *mathematical thinking competence*, *problem tackling competence* en *modeling competence* verskil (2007:1-3). Vir hom is die *mathematical modeling competency* die insigryke gereedheid om al die dele van ’n wiskundige modelleringsproses in ’n sekere konteks uit te voer (p. 4). Die *problem tackling competency* lei na die *mathematical problem solving competency* wanneer die insigryke gereedheid om verskillende soorte wiskunde-probleme in hul klaar-geformuleerde vorm op te los, geaktiveer word. By P1 is die algemene gevoel van “perplexity due to too many roads to take and no compass given” oorweldigend. By P2 is die belewenis dat “in die modelle” gewerk word.

Uit die bostaande verwysings en beredenering is dit duidelik dat onderrig van wiskunde *deur of via* probleemoplossing die naaste vergelykende situasie verskaf aan wat in modellering plaasvind.

4. DIE ROL VAN VOORSTELLINGS IN MODELLERING

4.1 Veelvuldige voorstellings

’n Konseptuele sisteem (vergelyk paragraaf 3.4) is iets wat hoofsaaklik in ’n persoon se kop bestaan. Daar is egter ook ’n ander sisteem wat uitgewys word in die eksterne aspekte van modellering, naamlik die gesproke taal, geskrewe simbole, prente, diagramme en konkrete modelle wat gebruik word om interne sisteme uit te druk en om die eksterne sisteem te beskryf. Dit staan bekend as die voorstellingsisteem (Lesh & Doerr, 2000: 363). Hiervolgens is voorstellings deel van modellering. ’n Ander aspek van modellering is dié van veelvuldige voorstellings. Veelvuldige voorstellings is ’n bevestiging van vertikale matematisering wat dui op ’n dieper worsteling met die probleem. Verdere en ander voorstellings wat na die aanvanklike voorstellings van dieselfde probleem volg, dui op ’n dieper verstaan daarvan.

Die eindpunt van elke probleemoplossingsiklus is ’n bepaalde voorstelling. In Wessels (2006) se navorsing was dit dus moontlik om die proses te volg wat die leerders herhaaldelik gekies het. Sy het ook aangedui dat sommige van die spesifieke voorstellings wat gevolg is, op ’n hoër denkvlak was as die vorige voorstelling.

Wanneer ’n modelleringsbenadering ingevoer word by die onderrig en leer van wiskunde, is die fokuspunt realistiese situasies wat betekenisvol is vir die leerders. Hierdie benadering bring drie belangrike implikasies (Wessels, 2006: 28; Doerr & English, PME 2001 CD:1-2):

(a) [T]he quantities and operations needed to mathematise situations must be useful.
(b) [M]eaningful contexts must be used to create a need for the development of a model to describe, explain and predict the behaviour of an experienced system.

> (c) [G]eneralisations, in stead of just an answer to a given problem, must be developed so that learners can use and reuse it to find solutions. In a modeling approach to learning mathematics, generalising and refining models are the key activities.

Die aard van voorbereiding van les-inhoud met die oog op die onderrig daarvan word ook geraak. Doerr en English (2003:113) wys op die volgende:

> Thus, a modeling perspective leads to the design of an instructional sequence of activities that begins by engaging students with nonroutine problem situations that elicit the development of significant mathematical constructs and then extending, exploring, and applying those constructs in other problem situations leading to a system or model that is reusable in a range of contexts.

Hier is dit duidelik dat hierdie bepaalde siening van modellering in wiskunde en wiskundeonderwys die eng en verskraalde implikasies van die intuïsionisme en konstruktivisme wat vroeër genoem is, ondervang en hervorm. Ons gaan nie nou daarop in oor hoe modellering die proses verteenwoordig wat deur wiskundiges gevolg word wanneer hulle wiskunde ontwikkel nie. Bo is daar enkele sydelingse verwysings daarna.

4.2 Die verband met matematisering

Voorstelling deur die leerder en die bestudering van voorstellingswyses is dus geweldig belangrik vir die wiskundeonderwyser, want so kan hy die eksterne voorstelling van die leerders waarneem en verstaan – dis gebaseer op hul denke en interne voorstellings wat bepaalde denknetwerke (schemata en modelle) en -patrone blootlê. So kan die onderwyser sy onderrig en assessering aanpas en rig sodat die leerder ten volle kan **verstaan**. So kom *"teaching and learning for understanding"* – die slagkreet van die *Reform Movement in Mathematics Education* sedert die einde van die 80-erjare – tot sy reg (Carpenter & Lehrer, 1999).

Freudenthal (1973) se werk in die Realistiese Wiskundeonderwysbenadering het gelei tot Treffers se onderskeiding tussen vertikale en horisontale matematisering wat soos volg beskryf word: "To mathematize horizontally means to go from the world of life to the world of symbols; and to mathematize vertically means to move within the world of symbols" (Norbury, n.d.).

- *Vertikaal:* Hier gaan dit oor die bou van wiskundige relasies en strukture. Dis die ontwikkeling van formele kennis gebaseer op die uitbou van hiërargiese kennisvlakke.
- *Horisontaal*: Dit verwys veral na die konteks waarin die vertikale kennis ontwikkel. Daar word nie nuwe wiskunde geleer nie en daar word nie na 'n hoër denkvlak beweeg nie.

Die Nederlanders het die onderskeiding ontwikkel tussen konteksryke en konteksarme omgewings. So is 'n konteksarme wiskundeprobleem byvoorbeeld 'n wiskundige vergelyking wat net uit simbole bestaan. 'n Konteksryke probleem is byvoorbeeld 'n woordprobleem wat volledig 'n realistiese situasie beskryf. In modellering is dit veral die matematiseringskomponent wat uitgewys word as die belangrikste probleemarea vir leerders (vergelyk Maaβ, 2005:68, 71).

Dr. Zalman Usiskin van die University of Chicago ('n baie bekende en vooraanstaande wiskunde-opvoedkundige in die VSA) het in 2003 'n voorbeeld van die verdere analise van 'n probleem aangebied – dit word hieronder ingesluit. Dit is 'n mooi aanduiding van vertikale matematisering volgens Freudenthal se model. Gewone teksboekprobleme kan op hierdie wyse heelwat meer sin vertoon in die wiskundeklaskamer. Basiese stappe in hierdie probleem-oplossingsproses wat oorgaan in 'n modelleringsiklus is die volgende:

- As die oplossing bereik is, moet daar gekyk word na meer as een oplossing.
- Die oplossing en die prosedure word bestudeer.
- Sal die oplossingsprosedure werk vir ander probleme?
- Kan die probleem uitgebrei word?

Die probleem wat hy gekies het vir hierdie illustrasie is die volgende:

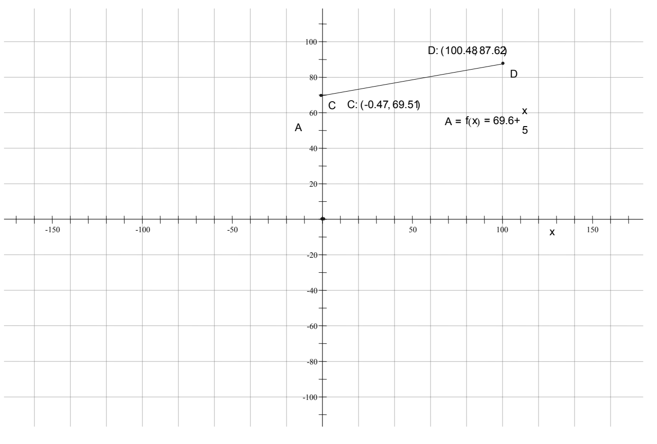
Die gemiddelde toetspunt probleem

Jane het ’n gemiddelde punt van 87 na vier toetse. Hoeveel moet sy in haar vyfde toets kry om ’n gemiddeld van 90 te kry vir die vyf toetse?

- o Los die probleem op: Daar is talle maniere waarop by die punt as 102 uitgekom kan word.
- o Veralgemeen die probleem: Wanneer algebra gebruik word, kan by A = $\frac{87.4 + x}{5}$

  oor die interval $0 \leq x \leq 100$ uitgekom word. Of in terme van x die volgende: $x = 5A - 87.4$

- o Stel die probleem voor: Figuur 4 bied vir ons ’n moontlike voorstelling.



Figuur 4: *Die toetspuntprobleem se grafiek*

Jane se laagste moontlike gemiddelde is 69,6 en haar hoogste moontlike gemiddelde is 89,6. Die krag van algebra help ons om ’n hele versameling van probleme opeens op te los.

- o Die probleem kan uitgebrei word: **The Scoring Title problem**

In April 1998, the basketball players Michael Jordan and Shaquille O’Neal were vying for the season individual scoring title until the last game of the season. The scoring title is won by the player with the highest average number of points per game, calculated by dividing the total number of points by the number of games the player has played. Before the last game, Jordan had scored 2 313 points in 81 games, for an average of 28,6 points per game. Shaq had scored 1 666 points in 59 games, for an average of 28,2 points per game. No one else had a chance to win the title. The Scoring Title problem can be stated as follows:

Given the above information, with what numbers of points in their final games does Shaquille O'Neal win the scoring title over Michael Jordan?

Hierdie uitgebreide probleem kan baie moeilik word wanneer spesifieke scenario's ingesluit word in die ondersoek – alles natuurlik in 'n baie realistiese konteks. Heelwat lineêre programmering word dan gebruik en hierdie probleem vertoon duidelik die elemente van vertikale matematisering wat gebou is op modellering. Hierdie tipe probleem kan uitgesoekte Graad 10-12-klasse oor verskeie periodes en dae besig hou, waartydens die kwaliteit van wiskundige denke sterk geaktiveer en beproef word. Dit wys ook op sy beurt die aard van die tipe probleem in die modelleringsbenadering.

Die vraag is nou watter verwantskap hierdie probleem en die uiteengesette werkswyse met modellering het. Volgens Jensen se model is daar te veel subprosesse aangedui in die probleem en is dit nie 'n modelleringsprobleem nie. Uit die standpunt van "verstaan-en-leer-wiskunde" is dit onteenseglik so dat hierdie vertikale matematiseringsoefening modellering sal laat plaasvind. Die probleem is "oop" genoeg, daar is nie net een oplossingswyse nie en met elke uitbreiding daarvan na die hoër denkvlak word nuwe probleemoplossingsiklusse bygevoeg. Die verskeie voorstellingswyses wat vereis word, dra daartoe by dat modellering plaasvind. Lesh en Doerr (2000: 366) bevestig dit so:

> Mathematizing (e.g. quantifying, visualizing or coordinating) is a form of modeling; it usually involves using specialized languages, symbols, graphs, pictures, concrete materials, and other notational systems to develop mathematical descriptions and explanations that make obvious heavy demands on learners' representational capabilities.

Dit sal 'n goeie probleem wees om aan senior leerders of aan onderwysers-in-opleiding te gee wat in groepe hieraan kan werk. Dit sal baie diskoers uitlok, wat kan lei tot die verwoording, regverdiging, uitruil, aanpassing en vestiging van wiskundige kennis in hierdie veld.

4.3 Navorsing toon dat modellering wiskundeleer bevorder

Biccard (2009) en Ndlovu (2008) het in plaaslike navorsing oor modellering bydraes op verskillende vlakke gelewer. Ndlovu het met behulp van *Geometer's Sketchpad*, 'n dinamiese rekenaarprogram, wat in die onderrig en leer van meetkunde, algebra en infinitesimaalrekene 'n beduidende rol kan speel, 'n leertrajek saamgestel waarin skoolverlaters blootgestel was aan 'n reeks sterk prosesgerigte modelleringsaktiwiteite om te leer wat die rol en aard van die "afgeleide" in infinitesimaalrekene is. Een van sy doelstellings vir die studie was om te bepaal:

> How effective is the use of dynamic mathematics software as a tool to model the concept of derivative and associated concepts of functions, variability, limit, continuity, differentiability, and what constraints or limitations are found?

Wanneer daar 'n oordrewe klem op die definisie- en algoritmiese gedrewe onderwys van hierdie belangrike konsep in infinitesimaalrekene is, is die konseptuele beeld van so 'n konsep baie verskraal. Ndlovu wou graag hierdie stand van sake weerlê en het daarin geslaag om 'n uitstekende projek te voltooi.

> ..... [T]he study addresses not only the limitations of the concept images (the total cognitive structure associated with a mathematical concept in an individual's mind) that students can develop in a traditional environment but also strives to go beyond to consider the innovative

> utilization of the static-numeric, dynamic-numeric, static-graphic and dynamic-graphic interfaces, and symbolic algebra interfaces offered by *Sketchpad* in one package. (Ndlovu, 2008: 6)

Aan die einde van sy studie (2008: 204) volg die bevinding:

> It can be concluded therefore that given a real world context to model by drawing a graph to represent the relationship between two variables, and to model the derivative of that relationship, the experimental students performed better than the control group students as a result of exposure to the *Sketchpad* activities.

Dit is hierdie soort wiskundeonderwys en tegnologiebenutting wat die skoolgaande jeug nodig het wanneer hulle wiskunde neem.

Biccard se navorsing fokus op die moontlike vordering wat by ’n groep Graad 7-leerders kan plaasvind as hulle vir 3 tot 4 maande aan ’n modelleringsperspektief blootgestel word. In ’n mondelinge gesprek (op 1 September 2009) verklaar sy soos volg:

> In terms of their improving competencies the following seems to be true of the three experimental groups:
> - Their autonomy.
> - Their ability to explain what they are thinking to each other.
> - Their beliefs about the nature of mathematical tasks.
> - Their ability to handle multiple sources of information.
> - Their measuring skills.
> - Their being specific about some of the mathematical words we use every day.

Dit vra egter intensiewe blootstelling aan ’n wiskundige modelleringsperspektief voordat leerders dit begin wys.

Die volgende blyk uit Maaβ (2006:115) se artikel asook die werk van Biccard. Die belangrikheid van wiskunde kan uitgewys word aan leerders wanneer daar met egte probleme gewerk word. Modelleringsprobleme is eg, kompleks, oop en word gekoppel aan die realiteit. Probleemoplossing en divergente denke is nodig om hierdie probleme op te los. Dit is verder belangrik om die inhoud so te kies dat dit toepaslik is vir die leerders.

Biccard het in haar studie gefokus op die ontwikkeling van wiskundige bevoegdhede of bekwaamhede (“mathematical competencies”) by Graad 7-leerders. Ons vereenselwig ons graag met die volgende definisie van wiskundige bevoegdhede van Mogens Niss van Swede (in Maaβ 2006:116):

> Mathematical competency ... means the ability to understand, judge, do and use mathematics in a variety of intra- and extra-mathematical contexts and situations in which mathematics plays or could play a role ....

Dus sluit wiskundige bevoegdhede wat ons leerders op alle vlakke van die skool en van die lewe nodig het, nie net “.... abilities and skills” in nie, “but also their reflected use in life and the willingness to put these skills and abilities into action” (Maaβ 2006:116). Die bevoegdhede waarna gesoek word in die probleemoplossing en modelleringskonteks is die bevoegdhede om

- Egtewêreld-probleme te verstaan en om ’n model daar te stel wat op die realiteit gegrond is.
- ’n Wiskundige model van die egte model te vorm.
- Wiskundige vrae in hierdie model op te los.

- Wiskundige resultate te interpreteer.
- Die oplossing te valideer. (Maaβ 2006)

Wiskundeleerders in enige skoolfase kom nooit met hierdie tipe probleme in aanraking nie. Daar bestaan geen modelleringsperspektief in ons skole nie en wiskundeonderwysers kan hierdie situasies nie hanteer nie. Ons senior leerders het egter hierdie oriëntasie en perspektief nodig om ’n greep op wiskunde te kry. Dit is hierdie greep wat hulle in staat sal stel om wiskundige strategieë en vaardighede met vertroue te kan kies en te gebruik. Dit is juis hierdie belangrike aspekte wat ontbreek by ons leerders wat daarvoor verantwoordelik is dat ons land teleurstellend uitsak en swak vaar in vergelyking met ander lande in internasionale opnames soos TIMSS.

5. DIE INVLOED VAN MODELLERING OP LEERDERS SE HOUDINGS EN OPVATTING (“BELIEF”)

’n Belangrike vraag om te vra is of die invoer van modellering in ’n skoolkurrikulum met gereelde modelleringsaktiwiteite vir leerders ’n positiewe invloed op hul houding en opvatting teenoor wiskunde teweegbring. Nie een van die twee studies, Ndlovu (2008) of Biccard, het uitsluitlik of diepgaande hierna gekyk nie. Daar is egter deurslaggewende navorsing van Maaβ (2005, 2006) wat duidelike uitsprake hieroor gee.

Die invloed van houdings en opvattings oor wiskunde van leerders op alle vlakke is baie belangrik en deurslaggewend. Maaβ (2005:66-72) sê die volgende hieroor wanneer sy die samevatting van haar studie doen na ’n diepgaande bespreking:

- Wiskundeleerders se gedrag teenoor modellering word uitsluitlik bepaal deur hulle houding en siening teenoor wiskunde. In die implementering van modellering in skoolwiskunde is dit juis hierdie houding en oriëntasie wat groot struikelblokke is vir die integrasie van modellering met die daaglikse skoolpraktyk. Sy beklemtoon

> Typical reaction patterns have been observed in connection with the attitude towards the modelling tasks and context-free mathematics. … [T]he data show a close connection between a positive attitude towards modelling examples or mathematics, respectively, and the corresponding performance (Maaβ (2005:67)

Die integrasie van modelleringtake in skoolwiskunde bevorder ’n toepassingsgerigte oriëntasie by leerders. Maaβ (2005:68) beklemtoon dit verder:

> The comment … clarified that students with an application-orientated, process-orientated and affective-shaped non-subject-based mathematical belief system develop and intensify their application-orientated beliefs.

Ongeveer die helfte van die leerders in die projek het hul toepassingsoriëntasie verhoog.

Verdere resultate van Maaβ (2005: 68-72) se studie is:

- Leerders in laer skoolfases ontwikkel ook modelleringsbevoegdhede en beskik oor kennis van die modelleringsproses. Hulle word dus daarin bekwaam om onbekende probleme oor egte wêreldsituasies te modelleer en ook om op ’n kritiese wyse voltooide modelle te bevraagteken. In hierdie studie het al die leerders hul bevoegdhede ontwikkel en verbeter.
- Die oop formulering van modelleringsprobleme en die noodsaaklikheid om die komplekse werklikheid te vereenvoudig laat die leerders toe om vir hierdie soort probleme oplossings

te vind wat by hul bekwaamheid pas. So presteer swakker wiskundeleerders vergelykenderwys heelwat beter as sterker leerders.

- As gevolg van die noue verband tussen modelleringsprosesse en die werklikheid is wiskunde vir die beoefenaars meer bruikbaar en interessant en ook meer toeganklik. Bestaande houdings en oriëntasie speel nog steeds 'n groot rol.
- Die positiewe houding teenoor modellering wat deur die noue verband met die werklikheid ontwikkel word en die verrassende sukses van swakker leerders verskaf 'n sterk affektiewe toegang tot wiskunde-doen en kan moontlik op die lang termyn lei tot die verbetering van wiskundige bekwaamhede.

Die waarde van modellering vir swakker leerders in die wiskundeklas word hierbo bevestig. Die groot soeke na "equity" (gelykwaardigheid) deur die 21ste-eeuse kurrikula oor die wêreld heen word dus deur modellering direk aangespreek en verbeter.

Die uitsprake van Morris Kline van 1962 word in bostaande aanhalings bevestig wanneer hy oor fundamentele beginsels en praktiese riglyne in wiskundeonderwys van gehalte skryf:

> In mathematics, knowledge of any value is never possession of information, but "know-how". To know mathematics means to be able to do mathematics: to use mathematical language with some fluency, to do problems, to criticize arguments, to find proofs and, what may be the most important activity, to recognize a mathematical concept in, or to extract it from, a given concrete situation. (Kline 1962:1)

Daar is eintlik nie 'n beter wyse om die belangrikheid van matematisering in wiskundeonderwys te beskryf nie. En dit is natuurlik waarom die toepassings van wiskunde vir 'n leerder en enige gebruiker kan werk en wanneer modellering sukses in die wiskundeklaskamer bring.

6. SAMEVATTING

(Tradisionele) probleemoplossing het vir 'n geruime tyd as die funderende perspektief in wiskundeonderwys gedien. Daar was egter talle tekortkominge in die teorie en toepassings wat onder andere gelei het tot die ontwikkeling van verskillende vlakke van probleemoplossing, naamlik die leer van wiskunde *met* probleemoplossing, *vir* probleemoplossing en *deur* probleemoplossing. Die leer van wiskunde *deur* probleemoplossing het eintlik die pad oopgemaak vir modellering. Modellering as 'n kragtige aanduiding van hoe leerders wiskunde baasraak en leer het gekom om te bly, want dit bevredig 'n wyer stel kriteria wat 'n groter wordende navorsings- en toepassingsveld bedien. Die toepassings- en interdissiplinêre moontlikhede van wiskunde kom sterk na vore in die gebruik van modellering as raamwerk om wiskunde te leer. Die groot boustene van modellering, naamlik 'n gesonde filosofie, 'n duidelike vermoë om praktykgerigte probleme aan te pak, 'n fokus op die gebruik van 'n verskeidenheid van voorstellings, en 'n konstruktiewe dinamika om vertikale matematisering te laat plaasvind, is volledig teenwoordig. Die behoefte aan modellering in wiskundeonderwys in ons land het meegebring dat daar op nuwe wyses gekyk moet word na die opleiding en voorbereiding van wiskundeondewysers. Alle leerders in wiskunde-klaskamers moet kan voordeel trek uit hierdie benadering. Daar is genoeg getuienis dat hierdie modelleringsbenadering lei tot beter verstaan van wiskunde. Leerders in alle skoolfases moet aan wiskundeonderwys met 'n modelleringsperspektief blootgestel word. Leerders moet die vrymoedigheid ontwikkel om realiteitsprobleme te identifiseer, aan te pak en op te los. Wiskunde moet geleer word deur daagliks probleme op te los.

BIBLIOGRAFIE

Benacerraf, P. & Putnam, H. 1964. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Oxford: Basil Blackwell.

Boromeo Ferri, R. 2006. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. In *Zentralblatt Fur Didaktik Der Matematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education:* 38(2): 86-95.

Carpenter, T. P. & Lehrer, R. 1999. Teaching and learning mathematics with understanding In E. Fennema & T. Romberg (eds) *Mathematics classrooms that promote understanding.* Mahwah: Erlbaum,pp. 19-32.

Cobb, P. 2007. Putting philosophy to work – Coping with multiple theoretical perspectives. In Lester, Jr (ed) 2007. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte: NCTM.

Cobb, P. & Jackson, K. 2009. (http://edr.sagepub.com/cgi/content/abstract/37/9/573)

Cockcroft, W.H. 1982. *Mathematics Counts: Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Primary and Secondary Schools in England and Wales.* London: Her Majesty's Office.

Collins, 2003. *Concise Thesaurus* (2nd ed). Glasgow: Harper Collins Publishers.

Confrey, J. & Kazak, S. 2006. A Thirty-Year reflection on Constructivism in Mathematics Education in PME. In A Gutiérrez & P Boero (eds) 2006 *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education – Past, present and future.* Rotterdam: Sense Publishers, pp. 305-346.

Davis, P. & Hersh, R. 1980. *The mathematics experience.* Boston: Birkhäuser.

Departement van Onderwys. 2002. *Hersiene Nasionale Kurrikulum Verklaring, Graad R-9 (Skole) Beleid – Wiskunde.* Pretoria.

Departement van Onderwys. 2003. *Nasionale Kurrikulum Verklaring, Graad 10-12 (Skole) Beleid – Wiskunde*. Pretoria.

Doerr, H. M. & English, L. D. 2001. A modeling perspective on students' learning through data analysis. The Proceedings of the 25th International Conference of PME, Vol 2: 361-368.

Doerr, H. M. & English, L. D. 2003. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education* 34(2): 110-136.

Dossey, J. A., McCrone, S., Giordano, F. R. & Weir, M. D. 2002. *Mathematics methods and modeling for today's mathematics classroom: A contemporary approach to teaching Grades 7-12.* Spain: Brooks/Cole.

Freudenthal, H. 1973. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D Reidel.

Jensen, T. H. 2007. Communicating the name of the game in mathematics education:The different crux of mathematical modelling competency and mathematical problem solving competency. Paper presented at ICTMA 13, Bloomington, USA, July 2007.

Kline, M. 1962. On the mathematics curriculum of the high school. *The Mathematics Teacher.* March. http://michel.delord.free.fr/kline62.html visited 5/11/2009.

Lesh, R. & Doerr, H.M. 2000. Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling in P. Cobb & E. Yackel (eds), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design.* Mahway: Erlbaum,pp. 361-383.

Lesh, R. & Zawojewsji, J.S. 2007. Problem solving and modeling. In F. K.

Lester (ed.), *Second. Handbook of research on mathematics teaching and Learning.* Charlotte: Information Age Publishing, pp.763-804.

Maaβ, K. 2005. Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. *Teaching mathematics and its applications*. (24)2-3: 61-74.

Maaβ, K. 2006. What are modelling competencies? In *Zentralblatt Fur Didaktik Der Mathematik (ZDM), The International Journal On Mathematics Education.* 2008(2): 113-142.

NMP, 2006. (http://science.nsta.org/nstaexpress/nstaexpress_2006_04_24_ legupdate.htm)

Ndlovu, M. 2007. *Modeling with Sketchpad to enrich students' concept image of the derivative in Introductory Calculus: Developing domain specific understanding*. Unpublished DEd Thesis in Didactics (Mathematics Education). Unisa, Pretoria.

Norbury, A.nd. http://partnership.mmu.ac.uk/cme/Student_Writings/TS/1?AngelaNorbury.html visited 5/14/2009.

O'Daffer, P., Charles, R., Cooney, T., Dossey, J. & Schielak, J . 2002 (2nd ed) *Mathematics for elementary school teachers.* Boston: Addison-Wesley.

Polya, G. 1945. *How to solve it?* Princeton, NY: Princeton University Press.

Reader's Digest Illustrated Oxford Dictionary 1998. Oxford University Press, Oxford.

Romberg, T. A ., Carpenter, T. P. & Kwako, J. 2005. Standards-based reform and teaching for understanding. In T. A. Romberg, T. P. Carpenter & F. Dremock (eds*), Understanding mathematics and science matters*, 3-26. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Schroeder, T.L. & Lester, F.K. 1989. Developing understanding in mathematics via problem solving. In P.R. Trafton & A.P. Schulte (eds) *New directions in elementary school mathematics.* NCTM, Reston, VA.

Stols, G.H. 2004. *Kegelsnedes as integrerende faktor in skoolwiskunde.* Ongepubliseere PhD proefskrif . Unisa, Pretoria.

The Connected Geometry Development Team. 2000. *Connected Geometry.* Education Development Centre, Newton, MA.

Usiskin, Z., Peresini, A., Marchisotto, E.A .& Stanley, D. 2003. *Mathematics for high school teachers: an advanced perspective.* New Jersey: Pearson Education.

Von Glasersfeld, E. 1989. Cognition, Construction of knowledge, and Teaching. *Synthese* 80: 121-140.

Wessels, D.C.J. 1982. *Die deurwerking van die aritmetisisme in die wiskunde-onderrig op skool en die opvoedkundige implikasies daarvan.* Ongepubliseerde MEd verhandeling UOVS, Bloemfontein.

Wessels, D.C.J. 1989. *'n Vakdidaktiese besinning oor die fundamentele invloed van grondbegrippe in die onderwys van wiskunde op skool.* Ongepubliseerde proefskrif. Unisa, Pretoria.

Wessels, D.C.J. 2000. Konstruktivisme en Intuïsionisme: Ontwikkelingslyne in Wiskundeonderwys. *Tydskrif vir Christelike Wetenskap/Journal for Christian Scholarship* 36 (1&2): 119-147.

Wessels H.M. 2006. *Types and levels of data arrangement and representation in Statistics as modeled by Gr 4-7 learners.* Ongepubliseerde proefskrif. Unisa, Pretoria.